Algebra I

Serie 11

Symmetrische Gruppe, Einfache Gruppen

1. Eine Gruppe heisst *metabelsch*, wenn es eine normale Untergruppe N gibt, derart dass N und G/N abelsch sind. Zeige, dass jede Untergruppe einer metabelschen Gruppe auch metabelsch ist.

2. (a) Bestimmen Sie für jedes n das Zentrum der symmetrischen Gruppe S_n.
   (b) Berechnen Sie den Zentralisator von (234) in S_5.
   (c) Berechnen Sie den Zentralisator von $(123)(456)$ in S_7.

3. Finde für alle $n \geqslant 1$ einen injektiven Homomorphismus $S_n \hookrightarrow A_{n+2}$.

4. Sei p eine Primzahl und sei $H \subset S_p$ eine Untergruppe, die einen p-Zykel und eine Transposition enthält. Zeige, dass $H = S_p$ gilt.

5. Sei K ein endlicher Körper der Ordnung q. Betrachte die Operation von $\mathrm{PGL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ wie in Serie 10 Aufgabe 7. Durch Numerieren der Elemente von $\mathbb{P}^1(K)$ entspricht diese einem Homomorphismus $\mathrm{PGL}_2(K) \to S_{q+1}$. Bestimme dessen Bild für alle $q \leqslant 4$.

6. (a) Für alle n und k bestimme die durchschnittliche Anzahl von Bahnen der Länge k eines Elements von S_n, wobei jedes Element von S_n als gleich wahrscheinlich betrachtet wird. Kontrolliere, dass das Resultat kompatibel mit der Gesamtzahl n der Ziffern ist.
   (b) Bestimme die durchschnittliche Anzahl der Bahnen eines Elements von S_n, und deren asymptotisches Verhalten für $n \to \infty$.
   *(c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällige Elemente von S_n miteinander kommutieren, und deren asymptotisches Verhalten für $n \to \infty$. (Für letzteres Literatursuche.)

7. Beim *Schiebespiel* oder *15-Puzzle* sind in der Anfangsposition 15 nummerierte Steine in aufsteigender Reihenfolge in einem 4×4-Rahmen angeordnet; das Feld unten rechts ist frei.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Ein Zug besteht darin, einen angrenzenden Stein auf das leere Feld zu schieben. Wir nennen eine Position *zulässig*, wenn sie mit einer endlichen Folge von Zügen aus der Anfangsposition erreicht werden kann und das leere Feld das Feld unten rechts ist.

Zeige, dass A_{15} die Gruppe der möglichen Permutationen der zulässigen Positionen ist. (In anderen Worten: Die Gruppe A_{15} operiert frei und transitiv auf der Menge der zulässigen Positionen.)

Folgere daraus, dass es keine Folge von Zügen gibt, welche die Position

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

in die Anfangsposition überführt.

*8. Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe, so dass der Index $p := [G : H]$ gleich dem kleinsten Primteiler der Ordnung von G ist. Zeige, dass H ein Normalteiler ist.

Hinweis: Untersuche Kern und Bild des Homomorphismus $G \to S_p$, welcher der Operation von G auf der Menge der Linksnebenklassen G/H entspricht.

*9. (a) Zeige, dass jede Untergruppe vom Index 5 von A_5 zu A_4 konjugiert ist.

(b) Folgere daraus, dass $\mathrm{Aut}(A_5) \cong S_5$ ist.