D-MATH
Prof. Richard Pink

Algebra I

HS 2015

Serie 12

Subnormalreihen, Kompositionsreihen, Auflösbare Gruppen, Semidirekte Produkte

1. (a) Gib eine Kompositionsreihe der Diedergruppe D_{12} an.

   (b) Sei p eine Primzahl. Gib eine Kompositionsreihe der Matrixgruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$

   an.

   (c) Finde alle Kompositionsreihen der Diedergruppe D_4.

2. Die *absteigende Zentralreihe* einer Gruppe G ist induktiv definiert durch $G^{[0]} := G$ und

$$G^{[m+1]} := [G, G^{[m]}] := \big\langle \{[g, g'] : g \in G,\ g' \in G^{[m]}\} \big\rangle.$$

   Existiert ein m mit $G^{[m]} = 1$, so heisst G *nilpotent.*

   (a) Zeige, dass jedes $G^{[m]}$ die entsprechende höhere Kommutatoruntergruppe $G^{(m)}$ enthält.

   (b) Folgere, dass jede nilpotente Gruppe auflösbar ist.

   (c) Zeige, dass die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$ mit allen Diagonaleinträgen 1 nilpotent ist.

   (d) Zeige, dass die Untergruppe aller oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_2(K)$ auflösbar, aber nicht nilpotent ist, wenn $|K| > 2$ ist.

   (e) Zeige, dass jede Untergruppe und Faktorgruppe einer nilpotenten Gruppe auch nilpotent ist.

*3. Die *aufsteigende Zentralreihe* einer Gruppe G ist induktiv definiert durch $Z_0 := 1$ und

$$Z_{i+1} := \{z \in G \mid \forall g \in G\colon [g, z] \in Z_i\}.$$

   (a) Zeige, dass für alle $i \geqslant 0$ gilt $Z_i \lhd G$.

   (b) Zeige, dass G genau dann nilpotent ist, wenn ein n existiert mit $Z_n = G$.

4. Zeige, dass für jedes $n \geqslant 1$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ das semidirekte Produkt $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \rtimes C_2$ ist.

5. Sei σ ein n-Zykel in S_n.

   (a) Bestimme den Zentralisator $\mathrm{Cent}_{S_n}(\langle\sigma\rangle)$.

   (b) Bestimme den Normalisator $\mathrm{Norm}_{S_n}(\langle\sigma\rangle)$ als semidirektes Produkt, mit Gruppenordnung und Struktur.

6. (a) Bestimme die Gruppenstruktur von $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$.

   (b) Bestimme die Isomorphieklassen aller Gruppen der Ordnung 16, welche ein semidirektes Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung 8 mit einer Gruppe der Ordnung 2 sind.