Serie 13

p-Gruppen, Sylowsätze, Kleine endliche Gruppen

Sei p eine Primzahl.

1. (a) Zeige, dass jede echte Untergruppe einer endlichen p-Gruppe echt in ihrem Normalisator enthalten ist.

   (b) Zeige, dass jede p-Gruppe nilpotent ist.

2. (a) Sei G eine p-Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert, mit der Fixpunktmenge $X^G := \{x \in X \mid \forall g \in G\colon gx = x\}$. Zeige $|X| \equiv |X^G| \mod (p)$.

   (b) Sei K ein endlicher Körper der Ordnung p^m, und sei $G < \mathrm{GL}_n(K)$ eine p-Gruppe. Sei $U < \mathrm{GL}_n(K)$ die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen 1. Zeige, dass ein $h \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $hGh^{-1} < U$.

*3. Sei G eine Gruppe und P eine p-Sylowuntergruppe von G. Zeige für beliebige Untergruppen H von G:

$$N_G(P) < H \implies H = N_G(H).$$

4. Zeige, dass jede endliche Gruppe der Ordnung pqr für paarweise verschiedene Primzahlen p, q, r auflösbar ist.

5. (a) Zeige, dass jede endliche Gruppe G mit einer nicht-trivialen zyklischen 2-Sylowuntergruppe eine normale Untergruppe vom Index 2 hat.

   Hinweis: Betrachte G als Untergruppe von $S(G)$ nach dem Satz von Cayley und achte auf das Vorzeichen.

   (b) Folgere daraus, dass eine nicht abelsche endliche Gruppe der Ordnung $\equiv 2 \mod 4$ nicht einfach sein kann.

6. Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 561 zyklisch ist.

   Hinweis: Zeige zunächst, dass es einen zyklischen Normalteiler N der Ordnung $11 \cdot 17$ gibt. Beweise und benutze dann, dass die Ordnung von $\mathrm{Aut}(N)$ nicht durch 3 teilbar ist.

*7. Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$ eine normale Untergruppe der Ordnung 17 hat.

   Hinweis: Finde eine 13-Sylowgruppe P und eine 17-Sylowgruppe Q von G mit $Q \subset N_G(P)$ und betrachte dann $N_G(Q)$.

**8. Zeige, dass die Ikosaedergruppe, das heisst die Gruppe aller Drehsymmetrien eines regelmässigen Ikosaeders, isomorph zu A_5 ist.