D-MATH | Algebra I | HS 2015
Prof. Richard Pink

Serie 14

p-Adische Zahlen

1. Sei p eine Primzahl. Zu jedem System von Ziffern $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ mit $\alpha_i = 0$ für alle $i \ll 0$ assoziieren wir die rationale p-adische Zahl

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i p^i \;\in\; \mathbb{Q}_p.$$

Jedes Element von $\mathbb{Q}_p$ besitzt eine eindeutige solche *Ziffernentwicklung*. Wir nennen die Ziffernfolge *schliesslich periodisch*, falls eine *Periode* $d > 0$ existiert, so dass für alle $i \gg 0$ gilt $\alpha_{i+d} = \alpha_i$.

Zeige, dass die p-adischen Zahlen mit schliesslich periodischer Ziffernfolge genau die rationalen Zahlen sind.

2. Welche der folgenden Gleichungen hat eine Lösung?

   (a) $x^2 + x + 1 = 0$ in $\mathbb{Q}_5$

   (b) $x^2 + x + 1 = 0$ in $\mathbb{Q}_7$

   (c) $x^3 + y^3 = z^3$ mit $xyz \neq 0$ in $\mathbb{Q}_5$

   (d) $x^3 + y^3 = z^3$ mit $xyz \neq 0$ in $\mathbb{Q}_3$

*3. Zeige:

   (a) Für jedes $\alpha \in \mathbb{Q}$ und jedes $m \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ liegt der Binomialkoeffizient $\binom{\alpha}{m}$ in $\mathbb{Z}[\alpha]$.

   (b) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ und $m \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt $\binom{\alpha+\beta}{m} = \sum_{n=0}^{m} \binom{\alpha}{n} \cdot \binom{\beta}{m-n}$ in $\mathbb{Q}$.

   (c) Seien p eine Primzahl und $\alpha \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$ sowie $\underline{a} \in p\mathbb{Z}_p$. Dann konvergiert die Reihe
   $$A(\underline{a}, \alpha) \;:=\; \sum_{m \geqslant 0} \binom{\alpha}{m} \cdot \underline{a}^m \;\in\; \mathbb{Z}_p.$$

   (d) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$ gilt $A(\underline{a}, \alpha) \cdot A(\underline{a}, \beta) = A(\underline{a}, \alpha + \beta)$.

   (e) Schreibe $\alpha \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$ in der Form $\alpha = \frac{r}{s}$ mit $r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{Z}^{>0}$ und $p \nmid s$. Dann gilt $A(\underline{a}, \alpha)^s = (1 + \underline{a})^r$. Lose gesprochen gilt also $A(\underline{a}, \frac{r}{s})$ "=" $(1 + \underline{a})^\alpha$.

**4. Für welche Primzahlen p besitzt die Gleichung $x^2 = 2015$ eine Lösung in $\mathbb{Q}_p$? (*Hinweis*: Googeln Sie „quadratisches Reziprozitätsgesetz".)