

Wiederholungsserie

1. Betrachte die reellen Zahlen $\alpha := \sqrt{2}$ und $\beta := \sqrt{3}$ und setze $\gamma := \alpha + \beta$. Gilt $\mathbb{Q}[\alpha, \beta] = \mathbb{Q}[\gamma]$ als Unterringe von \mathbb{R} ? Gilt $\mathbb{Z}[\alpha, \beta] = \mathbb{Z}[\gamma]$?
2. Gibt es einen Integritätsbereich mit 15 Elementen?
3. Sei K ein Körper. Zeige, dass es unendliche viele irreduzible normierte Polynome in $K[X]$ gibt.
4. Beschreibe den Ring $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})[X]/(2X - 1)$.
5. Bestimme welche der folgenden Polynome irreduzibel sind.
 - (a) $X^3 + 9X + 6X - 3 \in \mathbb{Z}[X]$.
 - (b) $4X^3 - 15X^2 + 60X + 180 \in \mathbb{Q}[X]$.
 - (c) $X^3 + 3X^2 + 5X + 5 \in \mathbb{Q}[X]$
 - (d) $X^7 + 7X^6 + 5X^2 - X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
6. Für welche Ringe R ist der Polynomring $R[X]$ ein Hauptidealring?
- *7. Sei $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ der Ring der analytischen Funktionen auf \mathbb{C} . Sei \mathcal{O}_0 der Ring der Keime analytischer Funktionen an der Stelle $0 \in \mathbb{C}$, definiert wie folgt: Betrachte die Menge

$$F := \left\{ (f, U) \mid \begin{array}{l} U \text{ ist eine offene Umgebung von } 0 \text{ und} \\ f: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist eine analytische Funktion} \end{array} \right\}$$

mit den beiden Operationen

$$\begin{aligned} (f, U) + (g, V) &:= (f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V}, U \cap V), \\ (f, U) \cdot (g, V) &:= (f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V}, U \cap V). \end{aligned}$$

Diese sind verträglich mit der Äquivalenzrelation

$$(f, U) \sim (g, V) : \iff \exists \text{ offene Umgebung } W \subset U \cap V \text{ von } 0 \text{ mit } f|_W = g|_W$$

auf F und induzieren auf der Menge der Äquivalenzklassen $\mathcal{O}_0 := F/\sim$ eine Ringstruktur.

- (a) Zeige, dass \mathcal{O}_0 und $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ Integritätsbereiche sind. Welcher der beiden ist auf natürliche Weise ein Unterring des anderen?

- (b) Zeige, dass \mathcal{O}_0 ein Hauptidealring ist, der genau ein maximales Ideal besitzt.
- (c) Beweise, dass die irreduziblen Elemente in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ genau die Primelemente sind, und bestimme diese. Zeige, dass nicht jedes Element ein Produkt von Primelementen ist, und schliesse daraus, dass der Ring $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ weder faktoriell noch noethersch (siehe §2.4) ist.
- (d) Beschreibe die Quotientenkörper von \mathcal{O}_0 und $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit Hilfe von (Keimen von) meromorphen Funktionen. (*Hinweis*: Weierstrass-Produkt-Satz.)
8. Sei K ein Körper. Berechne die Elementarteiler des $K[X]$ -Moduls
- $$M := K[X]/((X+1)^2) \oplus K[X]/((X-1)(X^2+1)) \oplus K[X]/((X+1)(X^2-1)).$$
9. Bestimme für jede Primzahl p die Ordnung der Automorphismengruppe der Gruppe $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \boxplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
10. Eine Gruppe G mit der Eigenschaft $[G, G] = G$ heisst *perfekt*. Zeige für alle $N \triangleleft G$:
- (a) Ist G perfekt, so auch G/N .
- (b) Sind N und G/N perfekt, so auch G .
- (c) Jede endliche Gruppe ist in einer perfekten Gruppe enthalten.
11. Zeige: Jede nilpotente endliche Gruppe der Ordnung n besitzt für jeden Primteiler $p|n$ genau eine p -Sylowgruppe G_p und ist das innere direkte Produkt $\times_{p|n} G_p$.
- *12. Sei $n \geq 3$ ungerade. Finde alle Isomorphieklassen von Gruppen G mit den Eigenschaften
- (a) $|G| = 2n$ und
- (b) G enthält eine zyklische Untergruppe H der Ordnung n .
- Hinweis*: Zeige, dass G ein semidirektes Produkt von H mit einer Untergruppe C der Ordnung 2 ist. Beschreibe die möglichen Homomorphismen $C \rightarrow \text{Aut}(H)$ und zeige, dass die entsprechenden semidirekten Produkte nicht isomorph sind.
13. Sei G eine endliche Gruppe, und sei H eine echte Untergruppe, deren Index $p := [G : H]$ gleich dem kleinsten Primteiler von $|G|$ ist. Zeige, dass H ein Normalteiler ist.
- Hinweis*: Untersuche Kern und Bild des Homomorphismus $G \rightarrow S_p$, welcher der Operation von G auf der Menge der Linksnebenklassen G/H entspricht.
14. Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ die *komplexe obere Halbebene* und betrachte die Abbildungsvorschrift

$$\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

- (a) Zeige, dass dies eine wohldefinierte Linksoperation ist.
 - (b) Bestimme den Kern des zugehörigen Homomorphismus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{H})$.
 - (c) Zeige, dass diese Operation transitiv ist.
 - (d) Berechne den Stabilisator von $i \in \mathbb{H}$.
- *15. Bestimme die von allen Grundoperationen mit Rubiks Würfel erzeugte Symmetriegruppe und deren Ordnung. Wenn man den Würfel auseinandernimmt, auf wieviele verschiedene Arten kann man ihn wieder zusammensetzen, so dass die Resultate sich nicht durch eine Folge von Grundoperationen ineinander überführen lassen?
- *16. Zeige: Für jeden endlichen Körper K mit $|K| \geq 4$ ist die folgende Gruppe einfach:

$$\mathrm{PSL}(2, K) := \mathrm{SL}_2(K) / \{\pm I_2\}.$$

17. Beweise für beliebige Untergruppen $H_1 < G > H_2 > H'_2$ die Ungleichungen

- (a) $[H_1 : H_1 \cap H_2] \leq [G : H_2]$.
- (b) $[G : H_1 \cap H_2] \leq [G : H_1] \cdot [G : H_2]$.
- (c) $[H_1 \cap H_2 : H_1 \cap H'_2] \leq [H_2 : H'_2]$.

- *18. *Cohen-Lenstra Heuristik*. Betrachte eine nicht-leere Menge X der Kardinalität n .
- (a) Zeige: Die Anzahl der Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung n ist > 0 und $< \infty$.

Seien G_1, \dots, G_r Repräsentanten dieser Isomorphieklassen. Sei \mathcal{G} die Menge aller Gruppenstrukturen auf X , und für jedes i sei \mathcal{G}_i die Teilmenge der Gruppenstrukturen auf X , so dass die resultierende Gruppe isomorph zu G_i ist. Wir fassen $\mu_i := |\mathcal{G}_i|/|\mathcal{G}|$ auf als die *Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Gruppe der Ordnung n isomorph zu G_i ist*.

- (b) Zeige, dass $\mu_i = c_n / |\mathrm{Aut}(G_i)|$ ist für eine nur von n abhängige Zahl $c_n \in \mathbb{Q}^{>0}$.
- (c) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für alle Gruppen der Ordnungen 4, 6, 8. Welche sind jeweils die häufigsten?