Musterlösung 10

Faktorgruppen, Isomorphiesätze, Operationen, Bahnen

1. Die von den Kommutatoren $[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$ für alle $g, h \in G$ erzeugte Untergruppe von G heisst die *Kommutatoruntergruppe* von G und wird mit $[G,G]$ bezeichnet. Zeige:

   (a) Jede Untergruppe von G, die $[G,G]$ enthält, ist normal. (Insbesondere ist $[G,G]$ normal.)

   (b) Für jeden Normalteiler $N \triangleleft G$ gilt

   $$[G,G] < N \Longleftrightarrow G/N \text{ ist abelsch.}$$

   (c) Für jede abelsche Gruppe A und jeden Homomorphismus $\varphi : G \to A$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\overline{\varphi} : G/[G,G] \to A$, sodass $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ ist, wobei $\pi : G \to G/[G,G]$ die kanonische Projektion bezeichnet.

   Bemerkung: Die Faktorgruppe $G/[G,G]$ heisst *Abelisierung* von G, und die genannte Aussage heisst die *universelle Eigenschaft der Abelisierung*.

   (d) Berechne $[G,G]$ und $G/[G,G]$ für $G = D_n$ und alle $n \in \mathbb{Z}^{>0}$.

   Lösung:

   (a) Sei $H < G$ eine Untergruppe mit $[G,G] < H$ und seien $g \in G$ und $h \in H$ beliebig. Dann ist

   $$ghg^{-1} = (ghg^{-1})(h^{-1}h) = \underbrace{(ghg^{-1}h^{-1})}_{\in [G,G] < H} h \in H.$$

   Also gilt $gHg^{-1} < H$ für alle $g \in G$, und somit ist H ein Normalteiler.

   (b) Sei $N \triangleleft G$ ein Normalteiler. Der Kommutator zweier Elemente aN, bN der Faktorgruppe G/N ist gleich

   $$[aN, bN] = (aN)(bN)(aN)^{-1}(bN)^{-1} = aba^{-1}b^{-1}N = [a,b]N.$$

   Die Elemente kommutieren also genau dann, wenn $[aN, bN] = [a,b]N$ trivial in G/N ist. Dies ist äquivalent zu $[a,b] \in N$. Daher ist G/N genau dann abelsch, wenn die Kommutatoren $[a,b]$ für alle $a, b \in G$ in N liegen. Da $[G,G]$ von den Kommutatoren erzeugt ist, ist dies genau dann der Fall, wenn $[G,G] < N$ gilt.

(c) Für alle $g, h \in G$ ist $\varphi([g,h]) = [\varphi(g), \varphi(h)] = 1_A$, da A abelsch ist. Da der Kern von φ eine Untergruppe ist, folgt also $[G,G] < \operatorname{Ker}\varphi$. Die Behauptung folgt aus der universellen Eigenschaft der Faktorgruppe.

(d) Schreibe $D_n = \{1, T, \ldots, T^{n-1}, S, ST, \ldots, ST^{n-1}\}$ für eine Spiegelung S und eine Drehung T der Ordnung n. Dann gilt $ST^k = T^{-k}S$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wir berechnen alle Kommutatoren in D_n. Seien jeweils $k, \ell \in \mathbb{Z}$ beliebig:

- $[T^k, T^\ell] = 1$, da Potenzen von T kommutieren.
-
$$\begin{aligned} [T^k, ST^\ell] &= T^k ST^\ell T^{-k} (ST^\ell)^{-1} \\ &= T^k ST^\ell T^{-k} T^{-\ell} S = T^k S \underbrace{T^{-k} S}_{=ST^k} \\ &= T^{2k}. \end{aligned}$$
- $[ST^k, T^\ell] = [T^\ell, ST^k]^{-1} = T^{-2\ell}$.
-
$$\begin{aligned} [ST^k, ST^\ell] &= ST^k ST^\ell (ST^k)^{-1} (ST^\ell)^{-1} \\ &= S \underbrace{T^k S}_{=ST^{-k}} T^\ell T^{-k} \underbrace{ST^{-\ell}}_{=T^\ell S} S \\ &= T^{-k} T^\ell T^{-k} T^\ell = T^{2\ell - 2k}. \end{aligned}$$

Die Menge der Kommutatoren ist also

$$\{[g,h] \mid g, h \in D_n\} = \{T^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Wir sehen, dass diese bereits abgeschlossen unter der Gruppenoperation und unter Invertieren ist. Die Kommutatorgruppe ist also

$$[D_n, D_n] = \begin{cases} \{1, T, \ldots, T^{n-1}\} = \langle T \rangle, & n \text{ ungerade}, \\ \{1, T^2, \ldots, T^{n-2}\} = \langle T^2 \rangle, & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Im ersten Fall hat $[D_n, D_n]$ Index 2 in D_n, also ist $D_n/[D_n, D_n] \cong Z_2$. Im zweiten Fall ist der Index 4 und $\{1, S, T, ST\}$ ein Repräsentantensystem der Nebenklassen. Wegen $S^2 = 1$ und $T^2 \in [D_n, D_n]$ haben die entsprechenden Elemente von $D_n/[D_n, D_n]$ beide die Ordnung 2. Also existiert ein Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} D_n/[D_n, D_n], \ (i,j) \mapsto S^i T^j [D_n, D_n].$$

(Bemerkung: Insbesondere ist D_n abelsch genau dann, wenn $n \leqslant 2$ ist.)

2. Seien a and b positive ganze Zahlen. Beweise unter Verwendung der Isomorphiesätze die Identität $\mathrm{ggT}(a,b)\,\mathrm{kgV}(a,b) = ab$.

   Lösung: We have seen that $\mathrm{ggT}(a,b)\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ (for ideals, but these are the same as subgroups of $\mathbb{Z}$). The definition of the least common multiple means that $\mathrm{kgV}(a,b)\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Using the first isomorphism theorem, we obtain

   $$a\mathbb{Z}/\,\mathrm{kgV}(a,b)\mathbb{Z} \;=\; a\mathbb{Z}/(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) \;\cong\; (a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z})/b\mathbb{Z} \;=\; \mathrm{ggT}(a,b)\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}.$$

   On the other hand, for any $m|n$ we have $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ by the second isomorphism theorem. By Lagrange we therefore have $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| \cdot |m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}|$ and hence $|m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = \frac{n}{m}$. Thus

   $$\frac{\mathrm{kgV}(a,b)}{a} \;=\; \big|a\mathbb{Z}/\,\mathrm{kgV}(a,b)\mathbb{Z}\big| \;=\; \big|\mathrm{ggT}(a,b)\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}\big| \;=\; \frac{b}{\mathrm{ggT}(a,b)}.$$

3. *Lemma von Goursat.* Betrachte Gruppen G_1 und G_2 und eine Untergruppe H von $G_1 \times G_2$, derart dass die beiden Projektionen $p_i : H \to G_i$ surjektiv sind. Zeige, dass es normale Untergruppen $N_1 \triangleleft G_1$ und $N_2 \triangleleft G_2$ gibt mit $(N_1 \times N_2) \triangleleft H$, so dass

   $$H/(N_1 \times N_2) \;<\; (G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \;\cong\; (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$$

   der Graph eines Isomorphismus $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ ist.

   Lösung: Write $(G_1 \times \{1\}) \cap H = N_1 \times \{1\}$ for some subset $N_1 \subset G_1$. As an intersection of subgroups $N_1 \times \{1\}$ is a subgroup of $G_1 \times \{1\}$. Applying the projection isomorphism $G_1 \times \{1\} \xrightarrow{\sim} G_1$ thus shows that N_1 is a subgroup of G_1.

   Next consider any $g_1 \in G_1$. By the surjectivity of p_1 there exists $g_2 \in G_2$ with $h := (g_1, g_2) \in H$. The calculation

   $$\begin{aligned} {}^{g_1}N_1 \times \{1\} &= {}^{g_1}N_1 \times {}^{g_2}\{1\} \\ &= {}^{(g_1,g_2)}(N_1 \times \{1\}) \\ &= {}^{(g_1,g_2)}(G_1 \times \{1\}) \cap {}^{(g_1,g_2)}H \\ &= ({}^{g_1}G_1 \times {}^{g_2}\{1\}) \cap {}^{h}H \;= \\ &= (G_1 \times \{1\}) \cap H \\ &= N_1 \times \{1\} \end{aligned}$$

   thus shows that ${}^{g_1}N_1 = N_1$. Varying g_1 shows that $N_1 \triangleleft G_1$.

   An analogous argument shows that $(\{1\} \times G_2) \cap H = \{1\} \times N_2$ for some normal subgroup $N_2 \triangleleft G_2$.

   Now $N_1 \times N_2$ is a normal subgroup of $G_1 \times G_2$, and by construction we have $N_1 \times N_2 = (N_1 \times \{1\}) \cdot (\{1\} \times N_2) \subset H \cdot H = H$. Under the identification $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$ we can view $H/(N_1 \times N_2)$ as a subgroup of $(G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$.

We claim that for every coset $g_1N_1 \in G_1/N_1$ there exists a unique coset $g_2N_2 \in G_2/N_2$ such that $(g_1N_1, g_2N_2) \in H/(N_1 \times N_2)$. Indeed, the conclusion is equivalent to $(g_1, g_2) \in H$. The existence thus follows from the surjectivity of p_1. For any second coset $g_2'N_2 \in G_2/N_2$ with $(g_1, g_2') \in H$ the element $(g_1, g_2)^{-1}(g_1, g_2') = (1, g_2^{-1}g_2')$ lies in H and hence in $(\{1\} \times G_2) \cap H = \{1\} \times N_2$. Thus $g_2^{-1}g_2' \in N_2$, and so $g_2N_2 = g_2'N_2$, proving the uniqueness part of the claim.

The same argument on the other side shows that for every coset $g_2N_2 \in G_2/N_2$ there exists a unique coset $g_1N_1 \in G_1/N_1$ such that $(g_1N_1, g_2N_2) \in H/(N_1 \times N_2)$.

Together with the previous claim this implies that $H/(N_1 \times N_2)$ is the graph of a bijective map $\varphi\colon G_1/N_1 \to G_2/N_2$, namely sending g_1N_1 to g_2N_2 for any $g_2 \in G_2$ with $(g_1, g_2) \in H$. The two projection maps p_1 and p_2 in the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} & \frac{H}{N_1\times N_2} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \frac{G_1}{N_1} & \frac{G_1\times G_2}{N_1\times N_2} \arrow[l] \arrow[r] & \frac{G_2}{N_2} \end{tikzcd}$$

are therefore bijective. Since they are also group homomorphisms, they are isomorphisms, and hence so is $\varphi = p_2 \circ p_1^{-1}$, as desired.

**4. Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeige, dass jede Untergruppe von G isomorph zu einer Faktorgruppe von G ist, und umgekehrt, dass jede Faktorgruppe von G isomorph zu einer Untergruppe von G ist. Gilt dasselbe auch für nichtabelsche endliche Gruppen?

5. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^\times$ der reellen Zahlen operiert auf $\mathbb{R}^2$ vermöge $t(x, y) = (tx, y/t)$. Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren dieser Operation.

Lösung: Die Bahn eines Elements $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Menge

$$\mathbb{R}^\times(a,\, b) = \{(ta,\, b/t)\ :\ t \in \mathbb{R}^\times\}.$$

Es gibt damit folgende Bahnen:

- $a, b \neq 0$: Hyperbeln $xy = ab$, denn jeder Punkt einer solchen Hyperbel erfüllt $x = ta,\ y = b/t$ mit $t = b/y = x/a \neq 0$.
- $a = 0,\ b \neq 0$: y-Achse ohne Ursprung.
- $b = 0,\ a \neq 0$: x-Achse ohne Ursprung.
- $(a, b) = (0, 0)$: Ursprung.

Der Stabilisator von $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Menge aller $t \in \mathbb{R}^\times$ mit $ta = a,\ b/t = b$. Diese ist $\{1\}$ für $(a, b) \neq (0, 0)$ und $\mathbb{R}^\times$ für $(a, b) = (0, 0)$.

**6. In einem zweidimensionalen Universum $\mathbb{R}^2$ sei im Ursprung eine Punktmasse (die Sonne) fixiert. Die Bewegung einer zweiten Punktmasse (eines Planeten) folge dem Newtonschen Gravitationsgesetz. Dies bedeutet eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bezüglich des Zeitparameters t.

(a) Für welche Anfangswerte $(x_0, \dot{x}_0)$ existiert eine für alle $t \in \mathbb{R}$ definierte Lösung $(x(t), \dot{x}(t))$?

(b) Auf welchem Bereich in $\mathbb{R}^4$ definiert die induzierte Abbildung $(t, (x_0, \dot{x}_0)) \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ eine Operation von $(\mathbb{R}, +)$?

(c) Klassifiziere die Bahnen (!) und Stabilisatoren dieser Operation.

7. Jede Linksoperation von G auf einer Menge X induziert eine Linksoperation auf der Menge

$$\bigl\{(x_1, \ldots, x_m) \in X^m \bigm| \forall i \neq j \colon x_i \neq x_j\bigr\}$$

durch $g(x_1, \ldots, x_m) := (gx_1, \ldots, gx_m)$. Ist diese transitiv, so heisst dies ursprüngliche Operation *m-fach transitiv.* Ist diese transitiv und frei, so heisst die ursprüngliche Operation *scharf m-fach transitiv.* Beispiel: Die natürliche Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf $\{1, \ldots, n\}$ ist m-fach transitiv für jedes $m \leqslant n$, und scharf n-fach transitiv.

Sei jetzt K ein Körper und $\mathbb{P}^1(K)$ die Menge aller eindimensionalen K-Untervektorräume von K^2. Die natürliche Operation von $\mathrm{GL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ faktorisiert durch eine Operation von $\mathrm{PGL}_2(K) := \mathrm{GL}_2(K)/K^\times{\cdot}I_2$. Zeige: Die Operation von $\mathrm{PGL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ ist scharf dreifach transitiv.

Lösung: We first consider the action of $\mathrm{GL}_2(K)$. Consider any triple of distinct 1-dimensional subspaces (Kv_1, Kv_2, Kv_3). Then any two of v_1, v_2, v_3 are linearly independent. Thus (v_1, v_2) is a basis of K^2, and hence $v_3 = x_1v_1 + x_2v_2$ for some $x_1, x_2 \in K$. Since v_3 is linearly independent of each of v_1, v_2, we have $x_1, x_2 \neq 0$. After replacing v_1 by x_1v_1 and v_2 by x_2v_2, which does not change the subspaces Kv_1 and Kv_2, we can thus assume that $v_1 + v_2 = v_3$. Consider the matrix $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ with $g\binom{1}{0} = v_1$ and $g\binom{0}{1} = v_2$. Then $g\binom{1}{1} = v_1 + v_2 = v_3$, and hence

$$\bigl(Kg\tbinom{1}{0}, Kg\tbinom{0}{1}, Kg\tbinom{1}{1}\bigr) \;=\; (Kv_1, Kv_2, Kv_3).$$

Thus every triple lies in the orbit of the triple $\bigl(K\binom{1}{0}, K\binom{0}{1}, K\binom{1}{1}\bigr)$, and so the action is transitive.

Next, an element $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ stabilizes the triple $\bigl(K\binom{1}{0}, K\binom{0}{1}, K\binom{1}{1}\bigr)$ if and only if $g\binom{1}{0} \in K\binom{1}{0}$ and $g\binom{0}{1} \in K\binom{0}{1}$ and $g\binom{1}{1} \in K\binom{1}{1}$. The first two conditions mean that g must be a diagonal matrix. Knowing this, the last condition means that the diagonal entries must coincide. Thus g must be a scalar matrix. Conversely, any scalar matrix stabilizes every 1-dimensional subspace. Thus the stabilizer of the given triple is the subgroup of scalar matrices $K^\times{\cdot}I_2$.

Writing any triple (Kv_1, Kv_2, Kv_3) in the form $\bigl(Kg'\binom{1}{0}, Kg'\binom{0}{1}, Kg'\binom{1}{1}\bigr)$ for some $g' \in \mathrm{GL}_2(K)$, we deduce that the stabilizer of any triple is ${}^{g'}(K^\times \cdot I_2) = K^\times \cdot I_2$.

Now observe that for any 1-dimensional subspace $V \subset K^2$ and any $g \in \mathrm{GL}_2(K)$, the image gV depends only on the coset $g \cdot K^\times \cdot I_2$, that is, on the image of g in $\mathrm{PGL}_2(K)$. Direct calculation shows that this induces an action of $\mathrm{PGL}_2(K)$. By the above results, the induced action on the set of triples is transitive and has point stabilizer $(K^\times \cdot I_2)/(K^\times \cdot I_2)$, the trivial subgroup. Thus this induced action is transitive and free. Therefore the action of $\mathrm{PGL}_2(K)$ on $\mathbb{P}^1(K)$ is simply 3-transitive (scharf dreifach transitiv).

8. Sei G eine Gruppe und sei $H < G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige, dass ein in H enthaltener Normalteiler $N \lhd G$ von endlichem Index existiert.

   Hinweis: Finde einen Homomorphismus $G \to S_n$, dessen Kern in H enthalten ist.

   Lösung: Betrachte die Linksoperation von G auf der Menge der Nebenklassen G/H durch $(g, xH) \mapsto gxH$. Durch Nummerieren der Nebenklassen entspricht diese Operation einem Homomorphismus $\varphi\colon G \to S_n$ für $n := [G : H]$. Setze $N := \mathrm{Kern}(\varphi)$. Jedes Element $g \in N$ hält dann jede Ziffer fest, also auch jede Nebenklasse. Insbesondere gilt $g \cdot H = H$, also $g \in H$, und somit $N < H$. Andererseits gilt $G/N \cong \mathrm{Bild}(\varphi)$, also $[G : N] = |\,\mathrm{Bild}(\varphi)| \leqslant |S_n| = n!$. Also ist $N \lhd G$ ein in H enthaltener Normalteiler von endlichem Index.