**Name:** **Studiengang:**

**Vorname:** **Legi-Nr.:**

---

Algebra I

**D-MATH, HS 2015**

Prof. Richard Pink

# Algebra I

## Zwischenprüfung

## 19. Februar 2016

## Wichtig:

- Die Prüfung dauert **120 Minuten**.
- Bitte legen Sie Ihre Legi (Studierendenausweis) offen auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Jede Aufgabe bietet vier bis fünf Aussagen an, die unabhängig voneinander richtig oder falsch sein können. Kreuzen Sie für jede Aussage das Kästchen “richtig” oder “falsch” an. Für ein korrektes Kreuz erhalten Sie **1 Punkt**, für ein unkorrektes **1 Minuspunkt**. Wenn sie bei einer Aussage kein Kreuz oder beide Kreuze machen, erhalten Sie dafür **0 Punkte**.
- Berücksichtigt werden nur Kreuze in den vorgesehenen Feldern, also keine weiteren Erklärungen usw.
- Etwaige Korrekturen klar kennzeichnen.
- Hilfsmittel: Keine. (Insbesondere keine Zusammenfassung, keine Literatur, keine Notizen, keine elektronischen Hilfsmittel wie z.B. Taschenrechner, keine Kommunikationsmittel wie z.B. Handy.)

Viel Erfolg!

1. Betrachte den Ring $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{2}, \frac{1}{2}]$. Welche der folgenden sind Unterringe von $R$?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) $\mathbb{Z}[\frac{i}{\sqrt{2}}]$.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) $\{a \cdot i\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) $\mathbb{Z}[i]$.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) $2\mathbb{Z}$.

*Lösung*:

(a) TRUE. This follows from $\frac{i}{\sqrt{2}} = i\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$. In fact we have $R = \mathbb{Z}[\frac{i}{\sqrt{2}}]$ since $i\sqrt{2} = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot 2$ and $\frac{1}{2} = -(\frac{i}{\sqrt{2}})^2$.

(b) FALSE. The subset is not closed under multiplication and does not contain 1.

(c) FALSE. The elements of $R$ can all be written in the form $a + b(i\sqrt{2})$, with $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. One sees directly that $i$ cannot be written in this form.

(d) FALSE. The subset does not contain 1.

2. Betrachte einen Ring $R$, einen Körper $K$, und einen Homomorphismus $\varphi : R \to K$.

☐ Richtig ☐ Falsch (a) Dann ist $\operatorname{Kern}(\varphi)$ ein Primideal von $R$.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Wenn $R$ ein Integritätsbereich ist, dann setzt sich $\varphi$ fort zu einem eindeutigen Homomorphismus $\tilde{\varphi} : \operatorname{Quot}(R) \to K$.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Wenn $K$ endlich ist, muss $R$ auch endlich sein.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) Wenn $R$ endlich ist, muss $\operatorname{Bild}(\varphi)$ ein Körper sein.

*Lösung*:

(a) TRUE. We know that $\operatorname{Bild}(\varphi)$, being a subring of $K$, is an integral domain. Since $R/\operatorname{Kern}(\varphi) \cong \operatorname{Bild}(\varphi)$, it follows that $\operatorname{Kern}(\varphi)$ is a prime ideal.

(b) FALSE. The homomorphism $\varphi$ must be **injective** for the assertion to hold.

(c) FALSE. The canonical projection $\mathbb{F}_p[X] \to \mathbb{F}_p[X]/(X) \cong \mathbb{F}_p$ is a counterexample.

(d) TRUE. We know that $\operatorname{Bild}(\varphi)$ is a finite integral domain, so it follows from Serie 4, Aufgabe 3(a) that $\operatorname{Bild}(\varphi)$ is a field.

3. Sei $R$ ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein echtes Ideal. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) Für beliebige $r, s \in R$ gilt $r + \mathfrak{a} = s + \mathfrak{a}$ genau dann, wenn $r = s$ ist.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Wenn es einen Körper $K$ und einen Ringhomomorphismus $\varphi : R \to K$ gibt, sodass $\operatorname{Kern}(\varphi) = \mathfrak{a}$ ist, dann ist $\mathfrak{a}$ ein maximales Ideal.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Es gilt $(x) + \mathfrak{a} = (1)$ für alle $x \in R \smallsetminus \mathfrak{a}$ genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ maximal ist.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) Ist $\mathfrak{a} = (a, b)$ für gewisse $a, b \in R$, dann ist $\mathfrak{a}$ kein Hauptideal.

*Lösung*:

(a) FALSE. With $R = \mathbb{Z}$ and $\mathfrak{a} = 2\mathbb{Z}$ we have $1 + 2\mathbb{Z} = 3 + 2\mathbb{Z}$ but $1 \neq 3$.

(b) FALSE. For example the canonical injection $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ has kernel $(0)$, which is not a maximal ideal of $\mathbb{Z}$. (For a general ring homomorphism $\varphi : R \to K$ the image $\operatorname{Bild}(\varphi) \cong$

$R/\operatorname{Kern}(\varphi)$ is a subring of $K$, hence an integral domain, and so $\operatorname{Kern}(\varphi)$ is a **prime** ideal in $R$, but that is all that one can conclude.)

(c) TRUE.

$\Rightarrow$: Since $\mathfrak{a}$ is a proper ideal, it is contained in a maximal ideal $\mathfrak{m} \subset R$. If there exists an $x \in \mathfrak{m} \smallsetminus \mathfrak{a}$, then the assumption in (c) implies the existence of an element $a \in \mathfrak{a}$ such that $x + a = 1$. Since $x, a \in \mathfrak{m}$, it follows that $1 \in \mathfrak{m}$ so that $\mathfrak{m} = 1$, a contradiction. Hence $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$.

$\Leftarrow$: Let $x \in R \smallsetminus \mathfrak{a}$. Then, since $\mathfrak{a}$ is maximal and $\mathfrak{a} \subsetneq (x)+\mathfrak{a}$, it follows that $(x)+\mathfrak{a} = (1)$.

(d) FALSE. Taking $a$ or $b$ equal to 1 or 0 suffices. A less trivial counter-example is $(X, X^2 + X) = (X) \subset \mathbb{C}[X]$.

4. Sei $R$ ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper $K$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) Jedes Element von $R[X] \smallsetminus \{0\}$ hat eine eindeutige Anzahl Primfaktoren.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Jedes irreduzible Element von $R[X]$ ist irreduzibel als Element von $K[X]$.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Wenn $R$ ein Hauptidealring ist, dann ist auch $R[X]$ ein Hauptidealring.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) $(R[X])^\times = R^\times$.

*Lösung*:

(a) TRUE. Dann ist $R[X]$ faktoriell, und jedes Element eines faktoriellen Rings hat eine eindeutige Primfaktorzerlegung bis auf Vertauschung und Äquivalenz der Faktoren, also ist die Anzahl der Primfaktoren eindeutig bestimmt.

(b) FALSE. The element $2 \in \mathbb{Z}[X]$ is irreducible, but not irreducible in $\mathbb{Q}[X]$.

(c) FALSE. Take $R = \mathbb{C}[Y]$.

(d) TRUE. Result from the course.

5. Sei $R$ ein beliebiger Hauptidealring. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) $R$ is ein Integritätsbereich, aber nicht notwendigerweise faktoriell.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Jedes Primideal in $R$ ist maximal.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Für jedes irreduzible $a \in R$ ist das Ideal $(a) \subset R$ ein Primideal.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) $R$ ist ein euklidischer Ring.

☐ Richtig ☐ Falsch (e) Es existiert ein Körper $K$, so dass $R$ isomorph zu $K[X]$ ist.

*Lösung*:

(a) FALSE. It was shown in the course that every principal ideal domain is factorial.

(b) FALSE. We only know that every **non-zero** prime ideal in $R$ is maximal.

(c) TRUE. In a unique factorization domain every irreducible element is prime, and $(a)$ is a prime ideal if and only if $a$ is prime.

(d) FALSE. A counter-example $R := \mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+i\sqrt{163})]$ was provided in the course.

(e) FALSE. For example $\mathbb{Z}$ is a principal ideal domain and does not contain a field; hence it is not isomorphic to $K[X]$ for any field.

6. Betrachte den Ring $R := \mathbb{Z}[i]$, der bezüglich der Normabbildung

$$N : R \to \mathbb{Z}^{\geqslant 0} : a + bi \mapsto a^2 + b^2$$

ein euklidischer Ring ist. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) Das Element 2 ist prim in $R$.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Ein Element $\pi \in R$ ist irreduzibel genau dann, wenn $N(\pi)$ eine Primzahl ist.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Für beliebige $r_1, \ldots, r_n \in R$ gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in R$, so dass gilt

$$\mathrm{ggT}(r_1, \ldots, r_n) \;=\; x_1 r_1 + \ldots + x_n r_n.$$

☐ Richtig ☐ Falsch (d) $\mathrm{ggT}(4+i, 3+5i) \sim 1 - 4i$.

*Lösung*:

(a) FALSE. Observe that $2 = (1+i)(1-i)$. We have seen that neither $(1+i)$ nor $(1-i)$ are units in $R$. Therefore 2 is reducible in $R$. Since prime elements are irreducible, it follows that 2 is not prime.

(b) FALSE. By Serie 5, Aufgabe 1(e) we know that primes $p \in \mathbb{Z}$ such that $p \equiv 3 \pmod 4$ are prime in $R$. Since for such $p$ we have $N(p) = p^2$, this provides a counter-example.

(c) TRUE. See course. The statement holds for any principal ideal domain, in particular for euclidean domains.

(d) TRUE. Direct computation using the euclidean algorithm. We have $4 + i = (3 + 5i) + (1 - 4i)$ and $3 + 5i = (-1 + i)(1 - 4i)$.

7. Welche der folgenden Polynome sind irreduzibel?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) $\frac{1}{10}X^4 + 3X^3 + 15X + \frac{2}{10}$ in dem Ring $\mathbb{Q}[X]$.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) $X^{2016} + X^{19} + X^2 - 1$ in dem Ring $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) $X^3 + X^2 + 1$ in dem Ring $\mathbb{Z}[X]$.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) $Y^3 + (X^2 - 2iX - 1)Y^2 + (X^2 + 1)Y - X + i$ in dem Ring $\mathbb{C}[X, Y]$.

*Lösung*:

(a) TRUE. Multiply by 10 and use the Eisenstein criterion for $p = 2$.

(b) FALSE. The polynomial has a zero at $X = -1$ and hence the factor $(X + 1)$.

(c) TRUE. The polynomial has no zeros in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; hence it is irreducible mod 2.

(d) TRUE by the Eisenstein criterion for the prime element $p := X + i$ in $\mathbb{C}[X]$.

8. Für welche der folgenden Matrizen in $M_{3\times 2}(\mathbb{Z})$ ist 3 ein Elementarteiler?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

☐ Richtig ☐ Falsch (b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

☐ Richtig ☐ Falsch (c) $\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 15 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

☐ Richtig ☐ Falsch (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 15 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$

*Lösung*:

Each of the given matrices has rank 2 and thus has two elementary divisors $e_1|e_2$. Of these $e_1$ is the ggT of the entries of the matrix, and $e_1e_2$ is the ggT of all $(2 \times 2)$ sub-determinants. Explicit calculation yields

| | $e_1$ | $e_1e_2$ | $e_2$ |
|---|---|---|---|
| (a) | 1 | 1 | 1 |
| (b) | 1 | 9 | 9 |
| (c) | 3 | 27 | 9 |
| (d) | 1 | 3 | 3 |

Thus (a) and (b) are FALSE, while (c) and (d) are TRUE.

9. Es gibt genau 2 Elemente ...

☐ Richtig ☐ Falsch (a) der Ordnung 6 in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) der Ordnung 3 in $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) der Ordnung 2 in der Quaternionengruppe $Q$.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) in $S_5/A_5$.

*Lösung*:

(a) TRUE. The residue class of an integer $n \in \mathbb{Z}$ has order 6 in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ if and only if $6n \equiv 0 \pmod{12}$ and $n, 2n, 3n \not\equiv 0 \pmod{12}$. This occurs if and only if 2 divides $n$ while 4 and 6 do not. It follows that there are two elements of order 6 in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, represented by $n = 2$ and $n = 10$.

(b) TRUE. The group $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ is abelian of order $7 - 1 = 6$ and hence isomorphic to $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. The latter has precisely two elements of order 3, namely $(0, 1)$ and $(0, 2)$.

(c) FALSE. The only element of order 2 in $Q$ ist $-1$. All other non-identity elements have order 4.

(d) TRUE. Fact from Vorlesung.

10. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen $S_2 \to S_3$ ist 4.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen $A_3 \to S_3$ ist 3.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen $S_3 \to S_2$ ist 2.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) Die Anzahl der Gruppenhomomorphismen $S_3 \to A_3$ ist 1.

*Lösung*:

Jeder Homomorphismus von $S_3$ in eine abelsche Gruppe $H$ ist trivial auf der Kommutatorgruppe $[S_3, S_3] = A_3$, faktorisiert also durch einen Homomorphismus $S_3/A_3 \to H$. Umgekehrt liefert jeder Homomorphismus $S_3/A_3 \to H$ durch Komposition einen Homomorphismus $S_3 \to H$. Dabei ist die Faktorgruppe $S_3/A_3$ zyklisch der Ordnung 2.

Sodann sei $\langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n$. Für jeden Homomorphismus $\varphi \colon \langle g \rangle \to H$ in irgendeine Gruppe $H$ gilt dann $\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(1) = 1$. Umgekehrt ist für jedes Element $h \in H$ mit $h^n = 1$ die Abbildung $\langle g \rangle \to H$, $g^i \mapsto h^i$ ein wohldefinierter Homomorphismus. Somit ist die Anzahl der Gruppenhomomorphismen $\langle g \rangle \to H$ gleich der Anzahl der Elemente $h \in H$ mit $h^n = 1$.

In (a) ist die gesuchte Anzahl also die Anzahl aller $\sigma \in A_3$ mit $\sigma^2 = 1$. Wegen $|A_3| = 3$ ist dies nur das Einselement; die Angabe 1 ist also RICHTIG.

In (b) ist die gesuchte Anzahl also die Anzahl aller $\sigma \in S_2$ mit $\sigma^2 = 1$. Wegen $|S_2| = 2$ sind dies beide Elemente von $S_2$; die Angabe 2 ist also RICHTIG.

In (c) ist die gesuchte Anzahl also die Anzahl aller $\sigma \in S_3$ mit $\sigma^3 = 1$. Dies sind genau die zwei Elemente der Ordnung 3 und das Einselement; die Angabe 3 ist also RICHTIG.

In (d) ist die gesuchte Anzahl also die Anzahl aller $\sigma \in S_3$ mit $\sigma^2 = 1$. Dies sind genau die drei Elemente der Ordnung 2 und das Einselement; die Angabe 4 ist also RICHTIG.

11. Sei $G$ eine beliebige endliche Gruppe. Welche der folgenden Bedingungen ist äquivalent dazu, dass $G$ kommutativ ist?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) Die Abbildung $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ ist ein Homomorphismus.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Die Abbildung $G \to G$, $g \mapsto g^2$ ist ein Homomorphismus.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Für fast alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung $G \to G$, $g \mapsto g^n$ ein Homomorphismus.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) Die Faktorgruppe $G/Z(G)$ ist zyklisch.

☐ Richtig ☐ Falsch (e) Die Faktorgruppe $G/[G,G]$ ist zyklisch.

*Lösung*:

(a) RICHTIG. Für alle $g, h \in G$ gilt $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$, also ist $(gh)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$ äquivalent zu $h^{-1}g^{-1} = g^{-1}h^{-1}$ äquivalent zu $gh = (h^{-1}g^{-1})^{-1} = (g^{-1}h^{-1}))^{-1} = hg$.

(b) RICHTIG. Für alle $g, h \in G$ ist $(gh)^2 = g^2h^2 \Leftrightarrow ghgh = g^2h^2$ und dies durch Kürzen äquivalent zu $hg = gh$.

(c) RICHTIG. Ist $G$ abelsch, so ist die Abbildung $g \mapsto g^n$ ein Homomorphismus für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei umgekehrt die Abbildung $g \mapsto g^n$ ein Homomorphismus für fast alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann existiert eine ganze Zahl $n \equiv -1$ modulo $|G|$, und für diese gilt $g^n = g^{-1}$ für alle $g \in G$. Somit ist die Bedingung (a) erfüllt, und folglich ist $G$ abelsch.

(d) RICHTIG. Ist $G$ abelsch, so ist $G/Z(G) = 1$ zyklisch. Die umgekehrte Richtung folgt aus Aufgabe 7, Serie 9.

(e) FALSCH. Es ist $[S_3, S_3] = A_3$, und $S_3/A_3$ ist zyklisch der Ordnung 2, aber $S_3$ ist nicht abelsch.

12. Der Gruppenhomomorphismus ...

☐ Richtig ☐ Falsch (a) $3\mathbb{Z}/69\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$, $a + 69\mathbb{Z} \mapsto a + 21\mathbb{Z}$ ist wohldefiniert.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) $2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $a + 8\mathbb{Z} \mapsto a + 4\mathbb{Z}$ ist injektiv.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) $27\mathbb{Z}/135\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, $a + 135\mathbb{Z} \mapsto a + 15\mathbb{Z}$ ist surjektiv.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) $7\mathbb{Z}/91\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, $a + 91\mathbb{Z} \mapsto a + 13\mathbb{Z}$ ist bijektiv.

*Lösung*: (a) ist FALSCH, weil $21\mathbb{Z} \not\subset 69\mathbb{Z}$ ist.

In (b) ist der Kern gleich $(2\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z})/8\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \neq 0$; also ist die Aussage FALSCH.

In (c) ist das Bild gleich $(27\mathbb{Z} + 15\mathbb{Z})/15\mathbb{Z} = \mathrm{ggT}(27, 15)\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$; also ist die Aussage FALSCH.

In (d) ist der Kern gleich $(7\mathbb{Z} \cap 13\mathbb{Z})/91\mathbb{Z} = 91\mathbb{Z}/91\mathbb{Z} = 0$ und das Bild gleich $(7\mathbb{Z} + 13\mathbb{Z})/13\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$; also ist die Aussage RICHTIG.

13. Jedes Element $\sigma \in S_n$ ist konjugiert zu $\sigma^5$ im Fall ...

☐ Richtig ☐ Falsch (a) $n = 3$.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) $n = 4$.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) $n = 5$.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) $n$ beliebig.

*Lösung*:

Für $n \geqslant 5$ ist 5 ein Teiler der Gruppenordnung $|S_n| = n!$, also besitzt $S_n$ ein Element $\sigma$ der Ordnung 5, und dieses ist nicht konjugiert zu $\sigma^5 = \mathrm{id}$. Dagegen hat für $n \leqslant 4$ jedes Element $\sigma \in S_n$ eine zu 5 teilerfremde Ordnung. Also gilt $\langle\sigma^5\rangle = \langle\sigma\rangle$, und da die Konjugationsklasse von $\sigma$ in der symmetrischen Gruppe nur von den Bahnenlängen unter $\langle\sigma\rangle$ abhängt, ist somit $\sigma$ konjugiert zu $\sigma^5$. Somit sind (a) und (b) RICHTIG und (c) und (d) FALSCH.

14. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) Die Gruppe $A_5$ ist von den Elementen $(1\ 2\ 3)$ und $(3\ 4\ 5)$ erzeugt.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Die Gruppe $A_5$ ist von den Elementen $(1\ 2\ 3\ 4)$ und $(4\ 5)$ erzeugt.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Die Gruppe $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ ist von der Restklasse $4 + 25\mathbb{Z}$ erzeugt.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) Die Gruppe $(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times$ ist von der Restklasse $4+25\mathbb{Z}$ erzeugt.

*Lösung*:

Aussage (a) ist RICHTIG, denn: Setze $H := \langle(1\ 2\ 3),\ (3\ 4\ 5)\rangle$. Da die Erzeugenden in $A_5$ liegen, gilt auch $H < A_5$. Insbesondere ist $|H|$ ein Teiler von $|A_5| = 60$. Da die Untergruppe $\langle(1\ 2\ 3)\rangle$ die Ziffern $1, 2, 3$ transitiv vertauscht, und die Untergruppe $\langle(3\ 4\ 5)\rangle$ die Ziffern $3, 4, 5$ ebenfalls, operiert $H$ transitiv auf $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Aufgrund der Bahnengleichung ist daher 5 ein Teiler von $|H|$. Da $(1\ 2\ 3)$ die Ordnung 3 hat, ist also $|H|$ ein Vielfaches von $3\cdot 5$. Somit ist $[A_5 : H] \leqslant 60/15 = 4$. Da $A_5$ nicht-abelsch einfach ist, folgt daraus $H = A_5$, wie gewünscht.

Aussage (b) ist FALSCH, weil $(1\ 2\ 3\ 4)$ und $(4\ 5)$ als ungerade Permutationen nicht in $A_5$ liegen.

Aussage (c) ist RICHTIG, weil 4 teilerfremd zu 25 ist. Genauer existieren nach dem chinesischen Restsatz ganze Zahlen $a, b$ mit $4a + 25b = 1$. Für jede ganze Zahl $c$ gilt also $4ac + 25ac = c$ und somit $c + 25\mathbb{Z} = ac(4 + 25\mathbb{Z})$. Also ist jedes Element von $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ ein Vielfaches der Restklasse $4 + 25\mathbb{Z}$.

Für (d) rechnen wir $(4+25\mathbb{Z})^2 = 16+25\mathbb{Z} = (1+3\cdot 5)+25\mathbb{Z}$ und folglich $(4+25\mathbb{Z})^{10} = (1 + 3 \cdot 5)^5 + 25\mathbb{Z} = (1 + 5 \cdot 3 \cdot 5 + \ldots) + 25\mathbb{Z} = 1 + 25\mathbb{Z}$. Die Ordnung der gegebenen Restklasse ist also ein Teiler von $10 < 20 = |(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times|$, und die Aussage ist FALSCH.

15. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) $A_4 \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Es existiert ein $\pi \in S_5$ mit $\pi^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Es existiert ein $\pi \in S_6$ mit $\pi^2 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) Jede Permutation $\pi \in S_n$ mit $\pi^3 = \mathrm{id}$ ist gerade.

*Lösung*:

(a) FALSE. In $A_4$ we have $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4) = (12)(34)$ and $(2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3) = (13)(24)$. Thus $A_4$ is not abelian and cannot be isomorphic to $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

(b) FALSE. Since $\mathrm{ord}(\pi^2) = 6$, it follows that $\mathrm{ord}(\pi) = 12$. In addition $\pi^2$ and therefore $\pi$ act on $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ without fixed points. Taking the disjoint cycle decompostion of such an element of $S_5$ yields either a 5-cycle or the product of a 2-cycle and a 3-cycle, neither of which has order 12.

(c) TRUE. Since $\mathrm{ord}(\pi^2) = 3$, we have $\mathrm{ord}(\pi) = 6$. By the same reasoning as above we see that the disjoint cycle decomposition of $\pi$ can be a 6-cycle, a product of two 3-cycles or a product of three 2-cycles. Only the first possibility has order 6. A simple computation shows that $\pi := (1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 6)$ works.

(d) TRUE. Recall that $\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ is a group homomorphism. Then if $\pi^3 = \mathrm{id}$ we have $\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = \mathrm{sgn}(\pi)^3 = \mathrm{sgn}(\pi^3) = 1$. Thus $\pi$ is an even permutation.

16. Betrachte die Permutation $\pi := (1\ 3\ 8\ 2)(4\ 5\ 9)(6\ 7) \in S_9$. Für welche ganzen Zahlen $k$ gilt $\pi^k = \mathrm{id}$?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) $k = 42$

☐ Richtig ☐ Falsch (b) $k = 180$

☐ Richtig ☐ Falsch (c) $k = 25$

☐ Richtig ☐ Falsch (d) $k = 12$

☐ Richtig ☐ Falsch (e) $k = 2016$

*Lösung*:

The order of a product of disjoint cycles is the kgV of their individual orders. Thus the order of $\pi$ is $\mathrm{kgV}(4, 3, 2) = 12$, and hence $\pi^k = \mathrm{id}$ if and only if $12|k$. Among the answer choices these are precisely $k = 180$ and $k = 12$ and $k = 2016$. Thus (b) and (d) and (e) are TRUE, while (a) and (c) are FALSE.

17. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) Jede Gruppe besitzt eine Kompositionsreihe.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Die Länge einer Kompositionsreihe hängt nur von der Gruppenordnung ab.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Je zwei Kompositionsreihen derselben Gruppe haben dieselbe Länge.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) Jede endliche zyklische Gruppe hat genau eine Kompositionsreihe.

*Lösung*:

Aussage (a) ist FALSCH für unendliche Gruppen; zum Beispiel hat $\mathbb{Z}$ keine Kompositionsreihe.

Auch (b) ist FALSCH; zum Beispiel ist $A_5$ einfach, hat also die Kompositionsreihe $1 \triangleleft A_5$ mit genau einem nicht-trivialen Schritt, während jede auflösbare Gruppe derselben Gruppenordnung $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ vier nichttriviale Schritte in jeder Kompositionsreihe hat.

Dagegen ist (c) RICHTIG als Teil des Satzes von Jordan-Hölder.

Schliesslich ist (d) FALSCH; zum Beispiel hat $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ die zwei verschiedenen Kompositionsreihen $0 \triangleleft 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $0 \triangleleft 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

18. Welche der folgenden Aussagen gilt für beliebige Normalteiler $N$ und $N'$ einer beliebigen Gruppe $G$?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) Auch $NN'$ ist ein Normalteiler von $G$.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Sind $N$ und $N'$ auflösbar, so ist auch $NN'$ auflösbar.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Sind $N$ und $N'$ abelsch, so ist auch $NN'$ abelsch.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) Jede Untergruppe von $N/(N \cap N')$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $NN'/N'$.

☐ Richtig ☐ Falsch (e) Jede Untergruppe von $N/(N \cap N')$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $NN'/N$.

*Lösung*:

(a) RICHTIG. Denn für alle $g \in G$ ist ${}^g(N \cdot N') = {}^gN \cdot {}^gN' = N \cdot N'$

(b) RICHTIG. Dann ist $NN'/N' \cong N/(N \cap N')$ nach dem ersten Isomorphiesatz, und als Faktorgruppe der auflösbaren Gruppe $N$ ist $N/(N \cap N')$ auflösbar, also ist $NN'/N'$ auflösbar, und da auch $N'$ auflösbar ist, ist schliesslich $NN'$ auflösbar.

(c) FALSCH. Zum Beispiel nicht für zwei verschiedene Untergruppen der Ordnung 4 der Diedergruppe $D_4$ oder der Quaternionengruppe.

(d) RICHTIG. Nach dem ersten Isomorphiesatz ist $N/(N \cap N') \cong NN'/N'$, dieser Isomorphismus induziert also einen Isomorphismus von jeder Untergruppe von $N/(N \cap N')$ auf ihr Bild, welches eine Untergruppe von $NN'/N'$ ist.

(e) FALSCH. Ist zum Beispiel $N' = \{1\}$, so ist einerseits $N/(N \cap N') = N/\{1\} \cong N$ und andererseits $NN'/N = N/N \cong \{1\}$. Ist zusätzlich $N \neq \{1\}$, so ist die Aussage also falsch.

19. Welche der folgenden Aussagen gilt für eine beliebige Primzahl $p$?

☐ Richtig ☐ Falsch (a) Jede Gruppe der Ordnung $p(p-1)$ ist auflösbar.

☐ Richtig ☐ Falsch (b) Jede Gruppe der Ordnung $p^n$ für beliebiges $n \geqslant 1$ ist auflösbar.

☐ Richtig ☐ Falsch (c) Es gibt genau 5 Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung $p^3$.

☐ Richtig ☐ Falsch (d) Es gibt genau 5 Isomorphieklassen von abelschen Gruppen der Ordnung $p^4$.

*Lösung*:

Die Aussage (b) ist ein Hauptsatz der Vorlesung, also RICHTIG.

Dagegen ist (a) FALSCH zum Beispiel für die Primzahl $p = 61$, denn die Gruppe $Z_{61} \times A_5$ hat Ordnung $61 \cdot 60 = p(p-1)$, ist aber nicht auflösbar.

Nach dem Struktursatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen ist jede abelsche Gruppe der Ordnung $p^n$ ein direktes Produkt von zyklischen Gruppen der Ordnung $p^m$ für gewisse $m \geqslant 1$. Die Isomorphieklassen entsprechen also verschiedenen Arten, $p^m$ als ungeordnetes Produkt von $p$-Potenzen zu schreiben. Ihre Anzahl ist somit gleich der Anzahl der ungeordneten Partitionen von $m$. Für $m$=3 ist diese gleich 3, für $m = 4$ ist sie gleich 5. Daher ist (c) FALSCH und (d) RICHTIG.

20. Jede Gruppe der Ordnung 2015 ist

☐ Richtig ☐ Falsch (a) abelsch

☐ Richtig ☐ Falsch (b) auflösbar

☐ Richtig ☐ Falsch (c) einfach

☐ Richtig ☐ Falsch (d) zyklisch

*Lösung*:

Die Primfaktorzerlegung $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ hat nur drei einfache Primfaktoren, deshalb ist die Gruppe auflösbar und (b) RICHTIG.

Da die Ordnung keine Primzahl ist, ist die Gruppe wegen (b) nicht einfach, und (c) ist FALSCH.

Wegen $5 | (31-1) = |(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})^\times|$ existiert ein nicht-abelsches semidirektes Produkt $(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Dessen direktes Produkt mit $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ist eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 2015. Diese ist dann auch nicht zyklisch. Somit sind (a) und (d) FALSCH.