C. Eicher Analysis Study Center ETH Zürich
HS 2015

Extremwerte

Gelöste Aufgabenbeispiele:

1. Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ auf dem Intervall $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$.

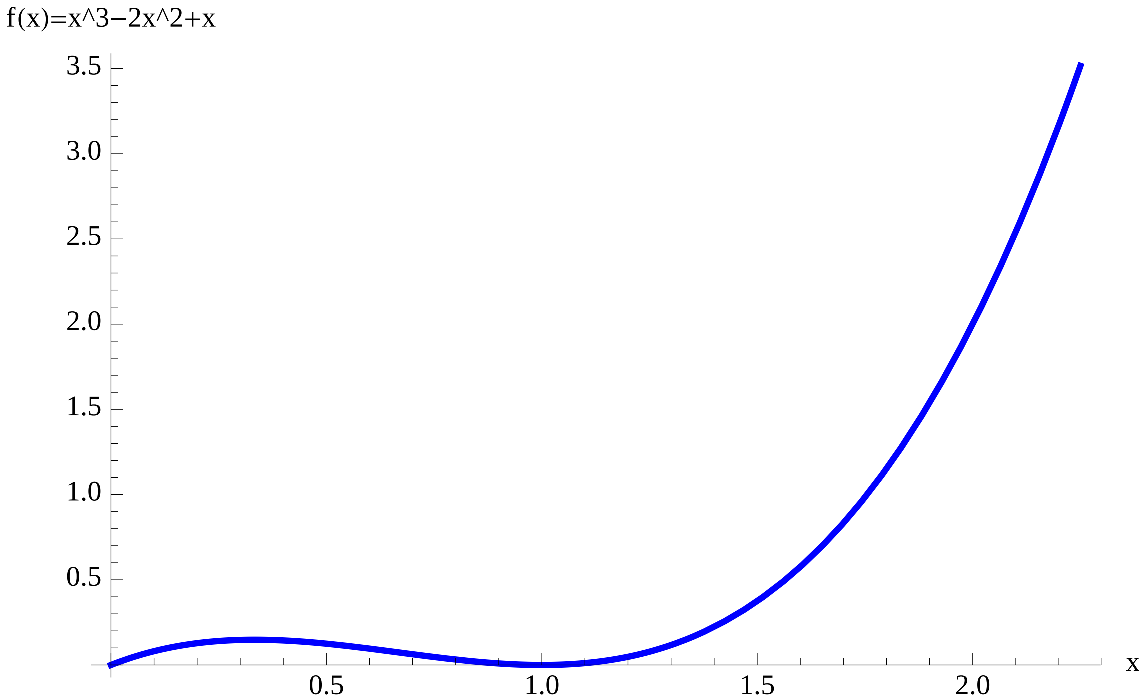
Lösung:
a. Bestimmung der lokalen Extrema im Innern des Definitionsbereichs.
Wir berechnen die erste und zweite Ableitung von f mit der Formel $(x^n)' = nx^{n-1}$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad f''(x) = 6x - 4 \ .$$

Das Innere des Definitionsbereichs $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$ ist das offene Intervall $\left]\frac{1}{4}, 2\right[$. Die Kandidaten für die lokalen Extremstellen in $\left]\frac{1}{4}, 2\right[$ sind diejenigen x, die $f'(x) = 0$ erfüllen. Diese x werden auch **kritische Punkte** genannt. Lösen der quadratischen Gleichung ergibt $x = 1$ oder $x = \frac{1}{3}$. Einsetzen ergibt $f''(1) = 2 > 0$, also ist $x = 1$ eine **lokale Minimalstelle** und $f(1) = 0$ ein **lokales Minimum** der Funktion. Weiter ist $f''\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$, also ist $x = \frac{1}{3}$ eine **lokale Maximalstelle** und $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$ ein **lokales Maximum** der Funktion.

b. Bestimmung der globalen Extrema.
Die Kandidaten für die globalen Extrema sind die lokalen Extrema im Innern des Definitionsbereichs und die **Randwerte** von f, d.h. die Werte von f in den Randpunkten $x = \frac{1}{4}$ und $x = 2$ des Intervalls $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$. Das **globale Maximum** von f ist die grösste dieser Zahlen, das **globale Minimum** von f ist die kleinste dieser Zahlen. In **a** wurden 0 und $\frac{4}{27}$ als die lokalen Extrema bestimmt. Die Randwerte sind $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{64}$ und $f(2) = 2$. Also ist das globale Maximum 2 und das globale Minimum 0.

Bitte wenden!



2. Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f(x) = x^3 e^{-2x}$ auf ganz $\mathbb{R}$. Hier bezeichnet e^y die Exponentialfunktion.

Lösung:

a. Bestimmung der lokalen Extrema.

Wir berechnen die erste und zweite Ableitung von f mit der Produkt- und Kettenregel

$$f'(x) = \left(x^3\right)' e^{-2x} + x^3 \left(e^{-2x}\right)' = 3x^2 e^{-2x} - 2x^3 e^{-2x} = x^2(3-2x)e^{-2x}$$
$$f''(x) = \left(x^2(3-2x)\right)' \, e^{-2x} + x^2(3-2x)\left(e^{-2x}\right)' = 2x(3-6x+2x^2)e^{-2x} \, .$$

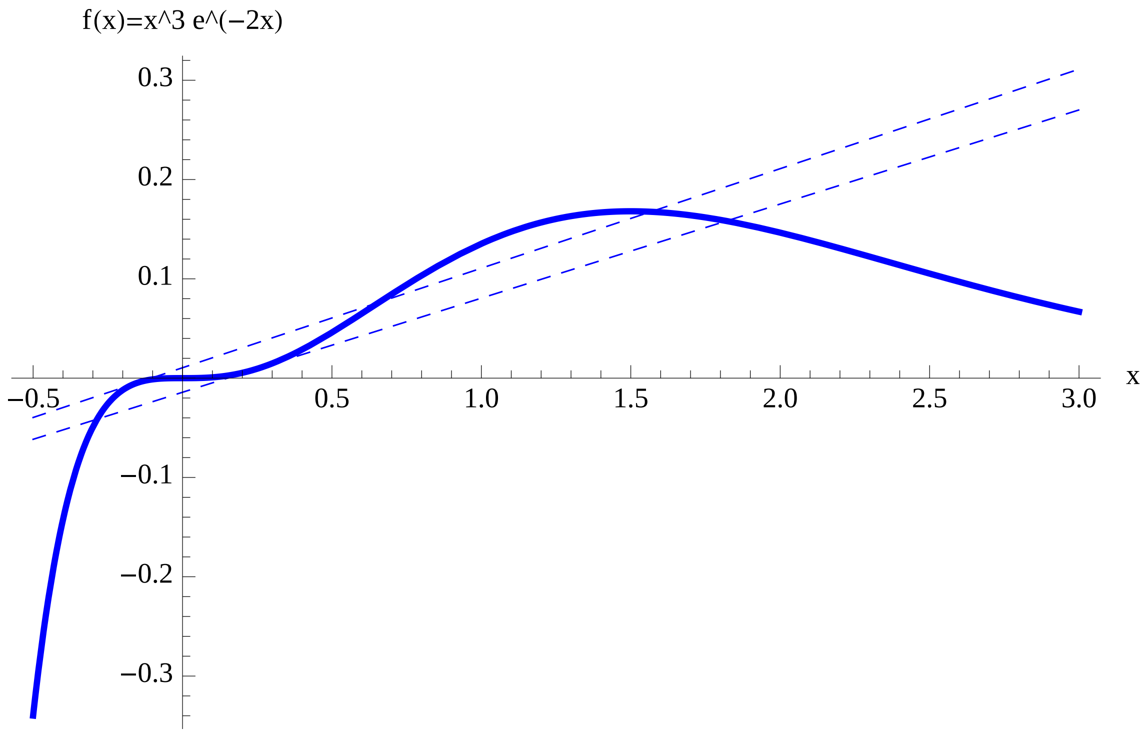
Da $e^{-2x} > 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist die Gleichung $f'(x) = x^2(3-2x)e^{-2x} = 0$ genau für $x = 0$ oder $x = \frac{3}{2}$ erfüllt. Diese sind die kritischen Punkte von f. Einsetzen $f''(0) = 0$ liefert noch keine Entscheidung, ob 0 ein lokales Extremum ist. Jedoch ist $f'(x) > 0$ für alle $x < 0$ und auch für $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$, denn dann gilt $x^2(3-2x) > 0$. Es folgt, dass $x = 0$ **keine** lokale Extremalstelle von f ist. Einsetzen $f''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}e^{-3} < 0$ zeigt, dass $x = \frac{3}{2}$ eine lokale Maximalstelle und $f(x) = \frac{27}{8}e^{-3}$ ein lokales Maximum ist.

b. Bestimmung der globalen Extrema.

Da der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$ ist, **muss zunächst überprüft werden, ob ein globales Maximum und ein globales Minimum überhaupt existiert**. Ist dies der Fall, so ist das globale Maximum das grösste lokale Maximum und das globale Minimum das kleinste lokale Minimum. Tatsächlich existieren die

Siehe nächstes Blatt!

Funktionsgrenzwerte $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (Vorlesung) und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Also existiert ein globales Maximum, aber kein globales Minimum. Aus **a** folgt, dass $\frac{27}{8}e^{-3}$ das globale Maximum ist.



3. Bestimme die Extremwerte, die y annimmt, wenn die Gleichung $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y = 1$ für reelle x und y erfüllt ist.

Lösung:

a. Bestimmung der lokalen Extrema im Innern des Definitionsbereichs.

Wenn wir die quadratische Gleichung $ay^2 + by + c = 0$ gemäss der bekannten Formel

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

auflösen, erhalten wir mit $a = 3$, $b = 8 - 4x$ und $c = 2x^2 - 8x - 1$

$$y_{1,2} = \frac{1}{3}\left(-4 + 2x \pm \sqrt{19 + 8x - 2x^2}\right) .$$

Hier muss $19 + 8x - 2x^2 \geq 0$ gelten, damit $y_{1,2}$ reell sind. Auflösen der quadratischen Gleichung zeigt

$$19 + 8x - 2x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[2 - \frac{3}{2}\sqrt{6}, 2 + \frac{3}{2}\sqrt{6}\right] ,$$

Bitte wenden!

womit der Definitionsbereich der Funktionen $y_{1,2}(x)$ bestimmt ist. Wir berechnen nun deren Ableitung mit der Kettenregel

$$y'_{1,2} = \frac{1}{3}\left(2 \pm \frac{4-2x}{\sqrt{19+8x-2x^2}}\right) .$$

Die kritischen Punkte von $y_{1,2}$ erfüllen also die quadratische Gleichung

$$\pm\frac{4-2x}{\sqrt{19+8x-2x^2}} = -2 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x-5=0 ,$$

deren Lösungen $x = 5$ und $x = -1$ sind. Setzen wir diese Werte in die ursprüngliche Gleichung ein, schliessen wir, dass $x = 5$ ein kritischer Punkt von y_1 und $x = -1$ ein kritischer Punkt von y_2 ist. Wir berechnen die zweite Ableitung mit der Produkt- und Kettenregel

$$\begin{aligned} y''_{1,2} = \left(y'_{1,2}\right)' &= \pm\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{\sqrt{19+8x-2x^2}} + \frac{(4-2x)\left(-\frac{1}{2}\right)(8-4x)}{(19+8x-2x^2)^{3/2}}\right) \\ &= \pm\frac{1}{3}\left(\frac{-2(19+8x-2x^2)-(4-2x)^2}{(19+8x-2x^2)^{3/2}}\right) \\ &= \mp\frac{18}{(19+8x-2x^2)^{3/2}} . \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist < 0 für y_1 und > 0 für y_2, folglich ist der kritische Punkt von y_1 eine lokale Maximalstelle von y_1 und der von y_2 eine lokale Minimalstelle von y_2. Nun setzt man $y_1(5) = \frac{1}{3}(6+3) = 3$ und $y_2(-1) = \frac{1}{3}(-6-3) = -3$ ein. Dies bestimmt die lokalen Extrema im Innern des Definitionsbereichs.

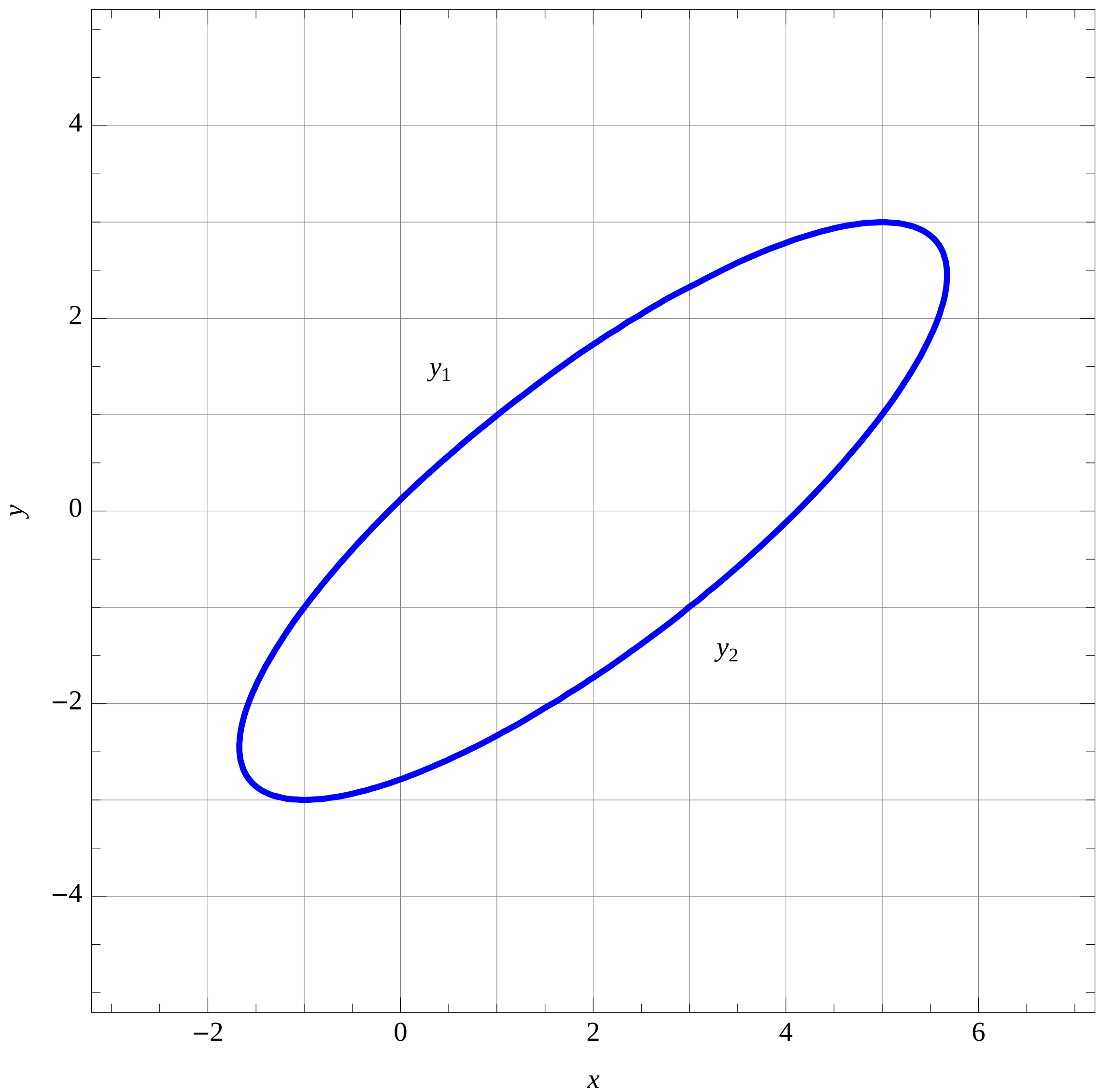
b. Bestimmung der globalen Extrema.

Die Randpunkte des Definitionsbereichs sind $x = 2\pm\frac{3}{2}\sqrt{6}$ und die entsprechenden Randwerte

$$y_1(x) = y_2(x) = \frac{1}{3}\left(-4+2\left(2\pm\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)\right) = \pm\sqrt{6}$$

geben weder einen grösseren noch einen kleineren Wert für y wie die in **a** gefundenen lokalen Extrema 3 und -3. Wir haben gezeigt, dass 3 und -3 die Extremwerte von y sind.

Bemerkung: Die Gleichung $2x^2-4xy+3y^2-8x+8y = 1$ beschreibt eine Ellipse in der (x, y)-Ebene. Anschaulich ist deshalb klar, dass y (als Funktion von x) genau ein lokales Maximum hat und dieses auch das globale Maximum ist. Randwerte müssen deshalb für die Bestimmung des globalen Maximums nicht in Betracht gezogen werden. Entsprechendes gilt für das Minimum.



4
2
0
−2
−4
y
y_1
y_2
−2
0
2
4
6
x