C. Eicher Analysis Study Center ETH Zürich
HS 2015

Konvergenz von Folgen und Reihen gegen einen gegebenen Grenzwert

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen oder komplexen Zahlen. Die Zahl a heisst **Grenzwert (Limes) der Folge**, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Sei eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ genannt **Fehlerschranke** beliebig vorgegeben. Dann existiert eine natürliche Zahl n_0, so dass für alle natürlichen Zahlen n, die grösser als n_0 sind, $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt. Hier bezeichnet $|\cdot|$ den Absolutbetrag. Diese Bedingung kann durch die Formel

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - a| < \varepsilon$$

ausgedrückt werden. Zu beachten ist hier die Reihenfolge der Quantoren. Man sagt dann, die Folge **konvergiert gegen den Grenzwert** a und schreibt $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a \ (n \to \infty)$. Ist der Grenzwert $a = 0$, spricht man von einer **Nullfolge**.

Erklärungen:

1. Die Zahl n_0 hängt meistens von ε ab, was mit der Schreibweise $n_0 = n_0(\varepsilon)$ deutlich gemacht wird.
2. Man stellt sich ε als kleine Zahl vor. Es genügt, die Bedingung statt für alle $\varepsilon > 0$ nur für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ oder eine strikt positive Nullfolge $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (z.B. $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$) zu prüfen.
3. Ersetzt man in der Bedingung $n \geq n_0$ durch $n > n_0$ oder $|a_n - a| < \varepsilon$ durch $|a_n - a| \leq \varepsilon$, erhält man eine äquivalente Bedingung.

Bitte wenden!

Gelöste Aufgabenbeispiele:

1. Zeige, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ gegen 0 konvergiert.

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass die Folge $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ gegen 0 konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Die Bedingung

$$|b_n - 0| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$$

ist $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, weil $\frac{1}{\sqrt{n}}$ positiv ist. Aus dieser Ungleichung folgt durch Quadrieren und Bilden des Kehrwerts $\frac{1}{\varepsilon^2} < n$. Nun existiert eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$, die strikt grösser wie $\frac{1}{\varepsilon^2}$ ist. Es folgt für alle $n \geq n_0$

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon^2 \ ,$$

da die Kehrwerte die umgekehrte Ungleichung erfüllen. Ziehen der Wurzel bewahrt die Ungleichungen, also gilt

$$|b_n - 0| = b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon \ .$$

Wir haben gezeigt, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert. Nun ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ bekannt und mit einer Rechenregel für Grenzwerte folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 - 0 = 0 \ .$$

2. Zeige $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. Hier ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Wir bemerken für $n \geq 2$

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = \frac{1}{n} \ ,$$

da $\frac{k}{n} < 1$ für $2 \leq k \leq n-1$ gilt. Nun existiert ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 2$, so dass $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ gilt. Daraus ergibt sich für alle $n \geq n_0$

$$\left|\frac{n!}{n^n} - 0\right| = \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \ ,$$

da die Kehrwerte die umgekehrte Ungleichung erfüllen, und damit die Behauptung.

Siehe nächstes Blatt!

3. Zeige, dass die Folge

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} - 1 & n = 2^k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht gegen 0 konvergiert.

Lösung: Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (oder jede andere Zahl im Intervall $\left(0, \frac{1}{2}\right]$). Wir zeigen, dass *kein* n_0 existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ $|a_n - 0| < \varepsilon$ gilt. Wir führen einen **Widerspruchsbeweis**. Angenommen es existiert ein solches n_0, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $2^k \geq n_0$. Nun ist für $n := 2^k$

$$|a_n - 0| = 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2^k} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \varepsilon \; ,$$

weil $2^k \geq 2$. Also ist die für n_0 geforderte Bedingung nicht erfüllt. Wir haben bewiesen, dass kein n_0 existiert.

4. Zeige

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\dots}} \; ,$$

d.h. die durch $a_1 = 1$, $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$, $n \geq 2$, rekursiv definierte Folge konvergiert gegen $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt $a = 1 + \frac{1}{a}$ (direkte Rechnung) und folglich $|a_n - a| = \left|\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a}\right|$ nach Definition von a_n. Wir vereinfachen die rechte Seite zu

$$\left|\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_{n-1}}{a_{n-1}a}\right| = \frac{|a - a_{n-1}|}{|a_{n-1}||a|} < \frac{|a - a_{n-1}|}{a} \; .$$

Für die Ungleichung haben wir verwendet, dass $a_{n-1} > 0$ (Beweis durch vollständige Induktion) und wegen $a_{n-1} = 1 + \frac{1}{a_{n-2}}$, $n \geq 3$, sogar $a_{n-1} > 1$ ist. Daraus folgt nämlich $|a_{n-1}||a| = a_{n-1}a > a$ und weil dieser Ausdruck der Nenner des Bruchs ist, gilt die umgekehrte Ungleichung $<$ für den Bruch selbst. Wir schliessen $|a_n - a| < \frac{|a-a_1|}{a^{n-1}}$ für $n \geq 2$. Da $a > 1$ ist, existiert ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq 2$, so dass $\frac{1}{a^{n_0-1}} < \frac{\varepsilon}{|a-a_1|}$ gilt. Es folgt für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < |a - a_1|\frac{1}{a^{n-1}} \leq |a - a_1|\frac{1}{a^{n_0-1}} < |a - a_1|\frac{\varepsilon}{|a - a_1|} = \varepsilon \; .$$

Wir haben die Behauptung gezeigt.

Bitte wenden!

Bemerkung: Die obige Wahl von n_0 ist bei einer linearen Entwicklung des Beweises nicht leicht vorherzusehen. Eine naheliegendere Wahl von n_0 wäre so, dass $\frac{1}{a^{n_0-1}} < \varepsilon$ gilt. Das obige Argument ergibt dann $|a_n - a| < |a - a_1|\varepsilon$. Erst jetzt wird ersichtlich, dass man die gewünschte Ungleichung erhält, wenn man ε durch $\frac{\varepsilon}{|a-a_1|}$ ersetzt.

5. Sei q eine reelle Zahl, $|q| < 1$. Zeige $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Lösung: Wir schreiben die N-te Partialsumme als

$$\sum_{n=1}^{N} nq^n = q\sum_{m=0}^{N-1}(m+1)q^m = q\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k,l=0:\, k+l=m}^{N-1} q^m = q\sum_{k,l=0}^{N-1} q^{k+l}\,.$$

Die letzte Gleichung ist eine Anwendung der **Cauchy-Produkt-Formel**. Wir können wegen $q^{k+l} = q^k q^l$ die Doppelsumme als Quadrat der geometrischen Summe schreiben

$$\sum_{k,l=0}^{N-1} q^{k+l} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(q^k\sum_{l=0}^{N-1} q^l\right) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} q^k\right)\left(\sum_{l=0}^{N-1} q^l\right) = \left(\frac{1-q^N}{1-q}\right)^2 .$$

Es ist bekannt, dass $\lim_{N\to\infty} q^N = 0$ gilt, da $|q| < 1$ ist. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte folgt

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1-q^N}{1-q}\right)^2 = \frac{\left(1-\lim_{N\to\infty} q^N\right)^2}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}\,.$$

Die Reihe ist als Grenzwert der Partialsummen definiert und wir erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}\,.$$