C. Eicher Analysis Study Center ETH Zürich
HS 2015

Partialbruchzerlegung und Stammfunktionen von rationalen Funktionen

Die **komplexe Partialbruchzerlegung (PBZ)** von $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ist

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{k1}}{x-x_k} + \cdots + \frac{A_{km_k}}{(x-x_k)^{m_k}} \qquad (\mathbb{C}\text{PBZ})\ .$$

Hier ist $Q(x) = c(x-x_1)^{m_1} \dots (x-x_k)^{m_k}$ die **Faktorisierung in Linearfaktoren** des komplexen Polynoms. Die x_j sind die komplexen Nullstellen von Q und $m_j \geq 1$ ihre Vielfachheiten. Das komplexe Polynom $P(x)$ hat strikt kleineren Grad wie $Q(x)$. Die **reelle Partialbruchzerlegung** von $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ist

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} =& \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{(x-x_2)^{m_2}} + \dots \\ &+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+a_1x+b_1} + \cdots + \frac{B_{1n_1}x + C_{1n_1}}{(x^2+a_1x+b_1)^{n_1}} + \dots \\ &+ \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2+a_lx+b_l} + \cdots + \frac{B_{ln_l}x + C_{ln_l}}{(x^2+a_lx+b_l)^{n_l}} \qquad (\mathbb{R}\text{PBZ})\ .\end{aligned}$$

Hier ist $Q(x) = c(x-x_1)^{m_1} \dots (x-x_k)^{m_k}(x^2+a_1x+b_1)^{n_1} \dots (x^2+a_lx+b_l)^{n_l}$ die **Zerlegung in lineare und unzerlegbare quadratische Faktoren** des reellen Polynoms. Die reellen Nullstellen von $Q(x)$ sind $x_1, \dots, x_k$. Für die komplexen (nicht reellen) Nullstellen $z_1, \overline{z_1}, \dots, z_l, \overline{z_l}$ von $Q(x)$ gilt $(x-z_j)(x-\overline{z_j}) = x^2+a_jx+b_j$. Das reelle Polynom $P(x)$ hat strikt kleineren Grad wie $Q(x)$.

Vorgehen bei der PBZ:

1. Man bestimmt die komplexen Nullstellen und dann die Faktorisierung von $Q(x)$.

Bitte wenden!

2. Man macht den Ansatz ($\mathbb{C}$PBZ) oder ($\mathbb{R}$PBZ).

3. Man bestimmt die **Koeffizienten der PBZ**

$$A_{11}, \ldots, A_{km_k} \in \mathbb{C} \text{ bzw. } A_{11}, \ldots, A_{km_k}, B_{11}, C_{11}, \ldots, B_{ln_l}, C_{ln_l} \in \mathbb{R} \,.$$

   Dazu bringt man die rechte Seite auf den gemeinsamen Nenner $Q(x)$. Es folgt, dass $P(x)$ gleich einem Polynom ist, dessen Koeffizienten linear in den Koeffizienten der PBZ sind. Man kann diese Gleichung eindeutig nach den Koeffizienten der PBZ auflösen. Dazu gibt es mehrere Methoden, die üblichste ist der Koeffizientenvergleich.

In Mathematica ist der Befehl für die *rationale* Partialbruchzerlegung `Apart`.

Möchte man die **Stammfunktion** $\int \frac{S(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}\,x$ berechnen, wobei $S(x)$ ein Polynom von beliebigem Grad ist, so geht man wie folgt vor. Man bringt $\frac{S(x)}{Q(x)}$ durch **Polynomdivision** auf die Form $R(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$, wobei $R(x)$ und $P(x)$ Polynome sind und der Grad von $P(x)$ strikt kleiner wie der von $Q(x)$ ist. Man bestimmt nun die reelle oder komplexe Partialbruchzerlegung von $\frac{P(x)}{Q(x)}$ und berechnet dann die Stammfunktion jedes Summanden.

Gelöste Aufgabenbeispiele:
Die Integrationskonstante wird überall mit C bezeichnet.

1. Bestimme die komplexe PBZ von $\frac{2x^2-4x+1}{x^3-4x^2+5x-2}$.

Lösung: Wir bestimmen zuerst die Nullstellen des Nenners. Wir raten die Nullstelle $x_1 = 1$. Wir führen eine **Polynomdivision** durch

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & (x^3 & -4x^2 & +5x & -2) & : (x-1) = x^2 - 3x + 2 \\
- & (x^3 & -x^2) & & & \\
\hline
 & & -3x^2 & +5x & -2 & \\
\hline
- & & (-3x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & & & 2x & -2 & \\
- & & & (2x & -2) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Nun ist $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ und wir erhalten die Faktorisierung des Nenners $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$. Wir machen den Ansatz ($\mathbb{C}$PBZ)

$$\frac{2x^2-4x+1}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{A_{21}}{x-2} \,.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wenn wir die rechte Seite auf den gleichen Nenner bringen und ausmultiplizieren, finden wir

$$\begin{aligned}2x^2 - 4x + 1 &= A_{11}(x-1)(x-2) + A_{12}(x-2) + A_{21}(x-1)^2 \\ &= (A_{11} + A_{21})x^2 + (-3A_{11} + A_{12} - 2A_{21})x + (2A_{11} - 2A_{12} + A_{21}) \ .\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$2 = A_{11} + A_{21} \qquad -4 = -3A_{11} + A_{12} - 2A_{21} \quad 1 = 2A_{11} - 2A_{12} + A_{21} \ .$$

Wir eliminieren A_{12} aus der zweiten und dritten Gleichung und erhalten $7 = 4A_{11} + 3A_{21}$. Mit der ersten Gleichung findet man $A_{11} = A_{21} = 1$ und dann $A_{12} = 1$ durch Einsetzen. Die komplexe (und reelle) PBZ ist also

$$\frac{2x^2 - 4x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2} \ .$$

2. Bestimme die komplexe und reelle PBZ von $\frac{x^2+1}{x^4+1}$.

Lösung:
Die Nullstellen des Nenners $x^4 + 1$ sind

$$\begin{aligned}x_1 &:= e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \ \overline{x_1} := e^{-\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \\ x_2 &:= e^{\frac{3\pi i}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \ \overline{x_2} := e^{-\frac{3\pi i}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \ .\end{aligned}$$

Die Faktorisierung des Nenners ist

$$x^4 + 1 = (x - x_1)(x - \overline{x_1})(x - x_2)(x - \overline{x_2}) \ .$$

Wir machen den Ansatz ($\mathbb{C}$PBZ)

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - \overline{x_1}} + \frac{A_3}{x - x_2} + \frac{A_4}{x - \overline{x_2}} \ .$$

Weil die linke Seite reell ist, finden wir $A_2 = \overline{A_1}$ und $A_4 = \overline{A_3}$. Es folgt

$$\begin{aligned}x^2 + 1 = &A_1(x - \overline{x_1})(x - x_2)(x - \overline{x_2}) \\ &+ \overline{A_1}(x - x_1)(x - x_2)(x - \overline{x_2}) \\ &+ A_3(x - x_1)(x - \overline{x_1})(x - \overline{x_2}) \\ &+ \overline{A_3}(x - x_1)(x - \overline{x_1})(x - x_2) \ ,\end{aligned}$$

Bitte wenden!

wenn wir den Nenner weglassen. Wenn wir in dieser Gleichung die Nullstellen des Nenners $x = x_1$ und $x = x_2$ einsetzen (**Einsetzmethode**), ist auf der rechten Seite jeweils nur ein Term nicht null und wir erhalten die Gleichungen

$$x_1^2 + 1 = A_1(x_1 - \overline{x_1})(x_1 - x_2)(x_1 - \overline{x_2})$$
$$x_2^2 + 1 = A_3(x_2 - x_1)(x_2 - \overline{x_1})(x_2 - \overline{x_2})\ .$$

Wir lösen die erste Gleichung

$$A_1 = \frac{i+1}{\left(e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)\left(e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)\left(e^{\frac{\pi i}{4}} - e^{-\frac{3\pi i}{4}}\right)} = \frac{i+1}{e^{\frac{3\pi i}{4}}(1+i)(1-i)2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

und auf dieselbe Weise die zweite Gleichung, $A_3 = -\frac{\sqrt{2}}{4}i$. Wir erhalten

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}i\left(-\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-\overline{x_1}} - \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-\overline{x_2}}\right)\ .$$

Wenn wir die konjugiert komplexen Partialbrüche zusammenfassen,

$$\frac{1}{x-\overline{x_j}} - \frac{1}{x-x_j} = \frac{\overline{x_j} - x_j}{(x-x_j)(x-\overline{x_j})} = -\frac{2i\,\mathrm{Im}\,x_j}{x^2 - 2x\,\mathrm{Re}\,x_j + |x_j|^2}\ ,$$

erhalten wir die reelle PBZ

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)\ .$$

3. Wir betrachten für $4q > p^2$ und $k \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$f_k(x) = \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\ .$$

a) Berechne $\int f_1(x)\,\mathrm{d}\,x$ und $\int x f_1(x)\,\mathrm{d}\,x$.

b) Zeige für $k > 1$ die Rekursionen

$$\int x f_k(x)\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{2(k-1)} f_{k-1}(x) - \frac{p}{2}\int f_k(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$\int f_k(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{x+p/2}{(k-1)(2q-p^2/2)} f_{k-1}(x) + \frac{2k-3}{(k-1)(2q-p^2/2)}\int f_{k-1}(x)\,\mathrm{d}\,x\ .$$

Hinweis: Verwende für die zweite Rekursion die Beziehung $\int f_{k-1}(x)\,\mathrm{d}\,x = x f_{k-1}(x) - \int x f'_{k-1}(x)\,\mathrm{d}\,x$, die aus partieller Integration folgt.

Siehe nächstes Blatt!

Lösung:
Wir schreiben $a = \sqrt{q - p^2/4}$.
a)

$$\int f_1(x)\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+p/2)^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x+p/2}{a}\right) + C$$
$$\int x f_1(x)\,\mathrm{d}\,x = \int \frac{x+p/2}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}\,x - \frac{p}{2a}\arctan\left(\frac{x+p/2}{a}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\log(x^2+px+q) - \frac{p}{2a}\arctan\left(\frac{x+p/2}{a}\right) + C$$

b) Für $k > 1$ gilt

$$\int x f_k(x)\,\mathrm{d}\,x = \int (x+p/2) f_k(x)\,\mathrm{d}\,x - \frac{p}{2}\int f_k(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= -\frac{1}{2(k-1)} f_{k-1}(x) - \frac{p}{2}\int f_k(x)\,\mathrm{d}\,x\ .$$

Für die zweite Rekursion beginnen wir mit der partiellen Integration

$$\int f_{k-1}(x)\,\mathrm{d}\,x = x f_{k-1}(x) + 2(k-1)\int x(x+p/2) f_k(x)\,\mathrm{d}\,x\ .$$

Das Integral auf der rechten Seite schreiben wir als

$$\int x(x+p/2) f_k(x)\,\mathrm{d}\,x = \int ((x^2+px+q) - p/2(x+p/2) - a^2) f_k(x)\,\mathrm{d}\,x$$
$$= \int f_{k-1}(x)\,\mathrm{d}\,x + \frac{p}{4(k-1)} f_{k-1}(x) - a^2\int f_k(x)\,\mathrm{d}\,x\ .$$

Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, erhalten wir die zweite Rekursion nach Zusammenfassen der Terme.

4. Bestimme $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^k}$.

Erste Lösung:
Wir verwenden die Rekursion aus Aufgabe **3b** mit $k = 2$, $p = 0$ und $q = 1$

$$\int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C\ .$$

Bitte wenden!

Zweite Lösung:
Wir machen eine komplexe PBZ des Integranden $\frac{1}{(x^2+1)^2}$. Die Faktorisierung des Nenners ist $(x^2+1)^2 = (x-i)^2(x+i)^2$. Der Ansatz ($\mathbb{C}$PBZ) ist

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{A_{11}}{x-i} + \frac{A_{12}}{(x-i)^2} + \frac{A_{21}}{x+i} + \frac{A_{22}}{(x+i)^2} \ .$$

Da die linke Seite reell ist, gilt $A_{21} = \overline{A_{11}}$ und $A_{22} = \overline{A_{12}}$. Wenn wir die rechte Seite auf den gleichen Nenner bringen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
1 &= A_{11}(x-i)(x+i)^2 + A_{12}(x+i)^2 + \overline{A_{11}}(x+i)(x-i)^2 + \overline{A_{12}}(x-i)^2 \\
&= A_{11}(x^2+1)(x+i) + A_{12}(x+i)^2 + \overline{A_{11}}(x^2+1)(x-i) + \overline{A_{12}}(x-i)^2 \\
&= (A_{11} + \overline{A_{11}})x^3 + (iA_{11} + A_{12} - i\overline{A_{11}} + \overline{A_{12}})x^2 + (A_{11} + 2iA_{12} + \overline{A_{11}} - 2i\overline{A_{12}})x \\
&+ (A_{11}i - A_{12} - \overline{A_{11}}i - \overline{A_{12}}) \ .
\end{aligned}$$

Sei $A_{11} = \alpha + i\beta$ und $A_{12} = \gamma + i\delta$. Dann ergibt ein Koeffizientenvergleich das Gleichungssystem

$$\alpha = 0 \quad -\beta + \gamma = 0 \quad \alpha - 2\delta = 0 \quad -2\beta - 2\gamma = 1 \ .$$

Wir finden die Lösungen $\alpha = \delta = 0$ und $\beta = \gamma = -\frac{1}{4}$. Die komplexe PBZ ist also

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{i}{x-i} + \frac{1}{(x-i)^2} - \frac{i}{x+i} + \frac{1}{(x+i)^2}\right) \ .$$

Es gilt $\int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x\pm i)^2} = -\frac{1}{(x\pm i)} + C$ und mit

$$\int \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) \mathrm{d}\,x = 2i \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x^2+1} = 2i\arctan(x) + C$$

folgt

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^2} &= -\frac{1}{4}\left(-2\arctan(x) - \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + C \ .
\end{aligned}$$