C. Eicher Analysis Study Center ETH Zürich
HS 2015

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Beispiele von Prüfungsaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind den Basisprüfungen (Vordiplomen) früherer Jahre des Studiengangs Mathematik und Physik entnommen. Das Jahr ist in Klammern angegeben.

1. (Herbst 00) Gegeben ist das System von Differentialgleichungen

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y \\[1em] \dot{y} &=& \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}y \end{array}\right\}.$$

1. Skizzieren Sie das Bild aller Lösungskurven in $\mathbb{R}^2$.
2. Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y + e^t \\[1em] \dot{y} &=& \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}y + e^t \end{array}\right\}$$

   zur Anfangsbedingung $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

2. (Frühjahr 01)

a) Bestimme die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{x} = -tx + e^{-\frac{t^2}{4}}\sqrt{x}, \quad x > 0,$$

zur Anfangsbedingung $x_0 := x(0) > 0$.

b) Berechne $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.

Bitte wenden!

3. (Frühjahr 01) Gegeben in $\mathbb{R}^3$ ist das Vektorfeld

$$\begin{aligned}\dot{x_1} &= x_1\\ \dot{x_2} &= 2x_1 + x_2 + 2x_3\\ \dot{x_3} &= 3x_1 + 2x_2 + x_3.\end{aligned}$$

Bestimme die Anfangsbedingungen $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ derjenigen Lösungen $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, welche die Eigenschaft haben, dass

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0.$$

4. (Frühjahr 02) Wir möchten diejenige differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestimmen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\int_0^x t f(t)\, dt = x^2 + f(x)$$

erfüllt. Betrachte dazu folgende Punkte:

a) Leite aus der obigen Gleichung eine Differentialgleichung für f her.

b) Bestimme die Anfangsbedingung für f in $x = 0$.

c) Löse die Differentialgleichung aus Punkt **a)** mit der in **b)** gefundenen Anfangsbedingung.
Falls Sie **a)**, **b)** nicht haben lösen können, betrachte das Anfangswertproblem:

$$f'(x) = x(f(x) + 3), \qquad f(0) = 0.$$

5. (Herbst 02) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 t^2; \quad x(0) = \frac{1}{2}$$

6. (Frühjahr 03) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen:

1. $y''' = y$
2. $y''' = y + e^{-t}$

7. (Herbst 03) Gegeben sei das Vektorfeld in $\mathbb{R}^2$, mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - x^2)\\ \dot{y} &= -2y.\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

1. Der Streifen S sei definiert durch

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, 0 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty\}$$

Zeige, dass jede Lösung $(x(t), y(t))$ mit Anfangsbedingung $(x(0), y(0)) \in S$ für alle Zeiten in S bleibt.

2. Bestimme die Lösung $(x(t), y(t))$ zur Zeit $t = 1$ mit der Anfangsbedingung $(x(0), y(0)) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und berechne den Grenzwert $\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t))$.
3. Skizziere die Bahnen in $\mathbb{R}^2$ aller Lösungen des Vektorfeldes.

8. (Frühjahr 04) Betrachten Sie für $x \geq 0$ die Differentialgleichung

$$\dot{x} = -tx + e^{-t^2/3}\sqrt[3]{x}\ .$$

1. Bestimmen Sie eine Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = 0$.
2. Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0 > 0$.
3. Zeigen Sie, daß jede Lösung $x(t)$ mit $x(0) > 0$ die Beziehung $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ erfüllt.
4. Zeigen Sie, daß die Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = 0$ nicht eindeutig ist.

9. (Frühjahr 04) Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^3$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2yz,\\ \dot{y} &= xy^2z,\\ \dot{z} &= -2xyz^2.\end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Lösung $(x(t), y(t), z(t))$ zur Anfangsbedingung

$$(x(0), y(0), z(0)) = (0, 1, 1).$$

2. Zeigen Sie, daß jede Lösung $(x(t), y(t), z(t))$ mit $x(0)y(0)z(0) > 0$ die Relationen

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} |y(t)| = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

erfüllt.
Hinweis: Finden Sie ein Integral der Differentialgleichung.

10. (Frühjahr 04) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \cos(t)x\big(1 - x^3\big).$$

Bitte wenden!

1. Bestimmen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = 1$.
2. Berechnen Sie die Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = 2$.
3. Für welche Anfangsbedingungen $x(0) > 1$ existieren die Lösungen für alle Zeiten?
4. Für welche Anfangsbedingungen $x(0) > 1$ sind die Lösungen außerdem periodisch in t?

11. (Frühjahr 04) Betrachten Sie in $\mathbb{R}^2$ die lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 15 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Anfangswerte $x(0) \in \mathbb{R}^2$, die zu einer Lösung $x(t)$ mit $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ führen.
2. Skizzieren Sie den Verlauf aller Lösungen in $\mathbb{R}^2$.

12. (Herbst 04) Bestimme die Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + y^2},$$

welche durch $(x, y) = (-2, 0)$ verläuft.

Hinweis: Betrachte zunächst x als Funktion von y.

13. (Frühjahr 05) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$xy'' + 2y' + 2xy = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $z(x) := xy(x)$.

14. (Frühjahr 06) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

15. (Herbst 06) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y^{(6)}(t) - y^{(5)}(t) - 8y^{(4)}(t) - 4y^{(3)}(t) - 48y^{(2)}(t) = 0. \qquad (*)$$

Hinweis: $y(t) = e^{-2it}$ ist eine Lösung von $(*)$.

Siehe nächstes Blatt!

16. (Frühjahr 07) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) = 2y(x) + e^x + \sin x.$$

17. Löse die Differentialgleichung

$$y'' + y = \begin{cases} x & , \quad x \leq \pi \\ \pi\, e^{\pi - x} & , \quad x > \pi \end{cases}$$

mit $y(0) = 0\,,\; y'(0) = 1.$

18. (Sommer 08) Finden Sie jene Lösung für welche $x(0) = 0$ und $y(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t)^2 - x(t), \\ \dot{y}(t) &= y(t) + 1. \end{aligned}$$