C. Eicher Analysis Study Center ETH Zürich
HS 2015

Konvergenz von Folgen und Reihen: Beispiele von Prüfungsaufgaben

Die folgenden Aufgaben sind den Basisprüfungen (Vordiplomen) früherer Jahre entnommen. Der Studiengang und das Jahr ist in Klammern angegeben.

1. (Mathematik und Physik, Herbst 97)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\cos 2k\pi} \frac{\ln k}{k}$

2. (Mathematik und Physik, Herbst 98)

a) Untersuche, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log\left(\frac{n^2 + an + 1}{n^2 + bn + 2}\right).$$

b) Untersuche, für welche $\omega > 0$ folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1+i)^n}{\omega^n(n + 2^n)}.$$

c) Untersuche, ob folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

Hinweis: Studiere das Vorzeichen der Reihenglieder. Beachte $x = (x - n\pi) + n\pi$.

Bitte wenden!

d) Konvergieren die Reihen **a)**, **b)** und **c)** absolut ? (zu begründen)

3. (Mathematik und Physik, Frühling 04)
Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^a)^b}$$

konvergent, absolut konvergent, divergent?

4. (Mathematik und Physik, Frühling 05)

1. Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ konvergiert.
2. Beweisen Sie, daß $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}} < 19$ gilt.

5. (Mathematik und Physik, Frühling 06)
Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}.$$

6. (Mathematik und Physik, Frühling 06)
Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) ?$$

7. (Mathematik und Physik, Frühling 07)
Berechnen Sie

a) (2 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \log\left((1+\tfrac{2}{n})^n\right)$$

b) (2 Punkte)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

c) (2 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(k+n)^2}$$

Siehe nächstes Blatt!

8. (Mathematik und Physik, Herbst 07)
Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$?

9. (Mathematik und Physik, Sommer 08)
Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{k \to +\infty} \left(1^k + 2^k + 3^k + 4^k\right)^{1/k}.$$

10. (Mathematik und Physik, Sommer 08)
Berechnen Sie

a) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n}\right),$ **b)** $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k.$

11. (Mathematik und Physik, Winter 08)
Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k - 2^k}$?

12. (D-ITET/RW, Sommer 10)
Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\log(n))^n x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} x^n$

13. (D-ITET/INFK, Winter 09)
Die Koeffizienten einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ erfüllen die Bedingungen $a_0 = 2$ und

$$a_n = \frac{2(n+1)}{n} a_{n-1}$$

für alle $n \geq 1$.

a) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe.

b) Gib eine explizite Formel für die Koeffizienten a_n an.

c) Zeige, dass die Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises die Funktion

$$f(z) = \frac{2}{(1-2z)^2}$$

darstellt.