C. Eicher ETH Zürich

Summen

Die Summe von mehreren Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kann mit Hilfe des **Summenzeichens** $\sum$ geschrieben werden

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Hier heisst k **Laufvariable** oder **Summationsindex** und $k = 1$ bzw. $k = n$ ist ihre **untere** bzw. **obere Grenze**. Die Laufvariable wird auch als **gebundene Variable** bezeichnet, da sie nicht mehr frei wählbar ist. Sind Zahlen

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$$

durch zwei Indizes bezeichnet, so kann man deren Summe als

$$\begin{aligned}
&a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\
&+a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\
&+ \ldots \\
&+a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} = \sum_{k=1}^{m} (a_{k1} + a_{k2} + \cdots + a_{kn}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \ .
\end{aligned}$$

schreiben. Der letzte Ausdruck heisst **Doppelsumme**, darin ist $\sum_{l=1}^{n}$ die **innere** und $\sum_{k=1}^{m}$ die **äussere** Summe.

Gelöste Aufgabenbeispiele:

1. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_{N+1}$ beliebige Zahlen und $n \leq N$. Zeige $\sum_{k=n}^{N} (a_{k+1} - a_k) = a_{N+1} - a_n$.

Erste Lösung: Wir schreiben die Summe aus

$$\sum_{k=n}^{N} (a_{k+1} - a_k) = (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) + \cdots + (a_{N+1} - a_N)$$

Bitte wenden!

und beobachten, dass a_{n+1} im ersten Summanden mit $-a_{n+1}$ im zweiten Summanden etc. kürzt

$$(a_{n+1} - a_n) + (a_{n+2} - a_{n+1}) + \cdots + (a_{N+1} - a_N) = -a_n + a_{N+1} \ .$$

Man spricht von einer **Teleskopsumme**.

Zweite Lösung: Wir zeigen nun, wie man das gleiche Resultat *ohne* Ausschreiben der Summe erhält. Wir schreiben die Summe von Differenzen als Differenz von Summen

$$\sum_{k=n}^{N}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=n}^{N} a_{k+1} \ - \sum_{k=n}^{N} a_k \ .$$

In der ersten Summe führen wir nun die neue Laufvariable $l := k + 1$ ein. Weil k von n bis N läuft, läuft l von $n + 1$ bis $N + 1$

$$\sum_{k=n}^{N} a_{k+1} = \sum_{l=n+1}^{N+1} a_l \ .$$

Wenn wir in der Differenz der Summen die Laufvariable der zweiten Summe von k nach l umbenennen, erhalten wir eine Differenz von Summen über l, die sich nur in der unteren und oberen Grenze der Laufvariable unterscheiden

$$\sum_{l=n+1}^{N+1} a_l - \sum_{l=n}^{N} a_l = \left(a_{N+1} + \sum_{l=n+1}^{N} a_l\right) - \left(a_n + \sum_{l=n+1}^{N} a_l\right) = a_{N+1} - a_n \ .$$

2. Zeige

$$\sum_{k=1\,:\,k \text{ gerade}}^{n} k = \begin{cases} \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) & n \text{ gerade} \\ \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) & n \text{ ungerade} \end{cases} \ .$$

Hier ist mit ": k gerade" unter der Summe angezeigt, dass man *nur über die geraden* k summiert.

Lösung:
Die der Lösung zu Grunde liegende Idee ist, dass jede gerade natürliche Zahl k eindeutig als $k = 2l$ für eine natürliche Zahl l geschrieben werden kann. Wir betrachten zuerst den Fall, wo n gerade ist. Dann läuft l von 1 bis $\frac{n}{2}$ (eine natürliche Zahl) und wir können die Summe über k als Summe über l schreiben

$$\sum_{k=1\,:\,k \text{ gerade}}^{n} k = \sum_{l=1}^{\frac{n}{2}} 2l \ .$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir bemerken nun

$$\sum_{l=1}^{\frac{n}{2}} 2l = 2\sum_{l=1}^{\frac{n}{2}} l = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) .$$

Im Fall wo n ungerade ist, sind die geraden Zahlen zwischen 1 und n gegeben durch $2, 4, \ldots, n-1$. Folglich läuft l von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ (ein Element von $\mathbb{N}_0$), wir können die Summe über k als Summe über l schreiben und erhalten wie im ersten Fall

$$\sum_{k=1\,:\,k\text{ gerade}}^{n} k = \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} 2l = \frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) .$$

Wir bemerken, dass es für $n = 1$ kein k gibt, dass die Bedingungen erfüllt. Die Summe heisst dann **leer** und ihr Wert ist null. Dieser Fall ist bereits durch die Formel für allgemeine ungerade n abgedeckt, da $\frac{n-1}{2} = 0$ für $n = 1$ ist.

3. Zeige

$$\sum_{j,k=1\,:\,k\leq j}^{n} 1 = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Lösung: Ausführlicher geschrieben ist die linke Seite

$$\sum_{j,k=1\,:\,k\leq j}^{n} 1 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1\,:\,k\leq j}^{n} 1 .$$

In der inneren Summe ist j (aber nicht k) eine **freie** Variable. Die innere Summe kann als $\sum_{k=1}^{j}$ geschrieben werden und folglich ist

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1\,:\,k\leq j}^{n} 1 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Bemerkung: Genauso könnte man die linke Seite als

$$\sum_{j,k=1\,:\,k\leq j}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1\,:\,k\leq j}^{n} 1$$

schreiben. Nun ist $\sum_{j=1\,:\,k\leq j}^{n} = \sum_{j=k}^{n}$ und folglich

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1\,:\,k\leq j}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1) .$$

Bitte wenden!

Führen wir die Laufvariable $l := n-k+1$ ein, so geht diese von $l = n-n+1 = 1$ bis $l = n-1+1 = n$, also ist

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k+1) = \sum_{l=1}^{n} l = \frac{n(n+1)}{2} \,.$$

(Wir haben verwendet, dass $k \mapsto l = n-k+1$ eine Bijektion der Indexmenge $\{1, 2, \dots, n\}$ mit sich selbst ist.)

4. Zeige

$$\sum_{l=1\,:\,l \text{ ungerade}}^{2n+1} \binom{2n+1}{l} = 2^{2n} \,.$$

Hier sind $\binom{2n+1}{l}$ Binomialkoeffizienten.
Lösung: Wenn l durch die ungeraden Zahlen zwischen 1 und $2n+1$ läuft, können wir durch $l = 2k+1$ eine neue Laufvariable k einführen, die von 0 bis n läuft. Also können wir die Summe als

$$\sum_{l=1\,:\,l \text{ ungerade}}^{2n+1} \binom{2n+1}{l} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}$$

schreiben. Mit der Pascal'schen Identität $\binom{2n+1}{2k+1} = \binom{2n}{2k+1} + \binom{2n}{2k}$ finden wir

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{2n}{2k+1} + \binom{2n}{2k} \right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \,.$$

Weil $\binom{2n}{2n+1} = 0$ gilt, können wir die obere Grenze der ersten Summe durch $n-1$ ersetzen. Nun läuft $2k+1$ durch alle ungeraden Zahlen zwischen 0 und $2n$, wenn k von 0 bis $n-1$ läuft, und $2k$ läuft durch alle geraden Zahlen zwischen 0 und $2n$, wenn k von 0 bis n läuft. Also gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} \,,$$

wenn wir den binomischen Lehrsatz verwenden.

5. Zeige mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die Identität für Binomialkoeffizienten

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} \,.$$

Siehe nächstes Blatt!

Hinweis: $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$
Lösung:
Der binomische Lehrsatz besagt

$$(1+x)^N = \sum_{l=0}^{N} \binom{N}{l} x^l \,.$$

Einsetzen in die im Hinweis gegebene Identität $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ ergibt

$$\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k = \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j\right) \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right) \,. \tag{1}$$

Wir berechnen die rechte Seite mit Hilfe der **Cauchy-Produktformel**

$$\sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} x^j \binom{n}{k-j} x^{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j}\right) x^k \,.$$

(1) ist eine Gleichheit von Polynomen. Diese gilt genau dann, wenn die Koeffizienten gleich sind. Die Gleichheit der Koeffizienten ist die gesuchte Identität

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} \,.$$