C. Eicher Analysis Study Center ETH Zürich
HS 2015

Vollständige Induktion

Sei für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $P(n)$ gegeben. Das **Prinzip der vollständigen Induktion**, auch **Induktionsbeweis** genannt, ist eine Methode um zu zeigen, dass $P(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist. Man geht wie folgt vor.

1. Induktionsverankerung oder Induktionsanfang $n = 1$. Man beweist, dass $P(1)$ wahr ist.

2. Induktionsschritt oder Induktionsschluss $n \mapsto n + 1$. Man beweist für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass aus der **Induktionsvoraussetzung** $P(n)$ die **Induktionsbehauptung** $P(n + 1)$ folgt.

Erklärungen:

(a) Der Wahrheitswert der Induktionsvoraussetzung $P(n)$ zählt nicht. Was zählt, ist der Schluss, dass *wenn* $P(n)$ gilt, so gilt auch $P(n+1)$. Anders gesagt leitet man beim Induktionsschritt $P(n+1)$ (oder $P(n)$) *unter Zuhilfenahme* von $P(n)$ (oder $P(n-1)$) her. In Formeln bedeutet der Induktionsschritt

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad P(n) \Rightarrow P(n+1) \ .$$

(b) Zeigt man nur den Induktionsschritt, aber nicht die Induktionsverankerung, so hat man nicht bewiesen, dass $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Das Prinzip der vollständigen Induktion kann für jede abzählbare Menge N statt $\mathbb{N}$ formuliert werden. Z.B. für $N = \{-2, 0, 2, \ldots\}$ zeigt man in der Induktionsverankerung, dass $P(-2)$ wahr ist und im Induktionsschritt, dass $P(n+2)$ aus $P(n)$ für jedes $n \in N$ folgt. Im Allgemeinen wählt man eine bijektive Abbildung zwischen N und $\mathbb{N}$, um zum Prinzip der vollständigen Induktion für $\mathbb{N}$ zurückzugelangen.

Bitte wenden!

(d) **Variante des Induktionsschritts**: Man beweist für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass, wenn $P(m)$ *für alle natürlichen Zahlen* $m \leq n$ gilt, die Aussage $P(n+1)$ folgt. Diese Variante wird manchmal **starke Induktion** genannt.

Tipps für das Lösen von Aufgaben:

(a) Wenn Aussagen $P(n)$ gegeben sind, ist es naheliegend, einen Induktionsbeweis zu führen, auch wenn dies nicht in der Aufgabenstellung angegeben ist. Dies ist aber nicht immer die einzig mögliche Lösung.

(b) In jedem Induktionsbeweis soll die Einteilung in Induktionsverankerung und Induktionsschritt wie oben deutlich dargestellt sein. Nur so ist ein Induktionsbeweis als solcher erkennbar.

Gelöste Aufgabenbeispiele:

1. Beweise

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Wir bemerken zunächst, dass diese Summe mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$ als $\sum_{k=1}^{n} k^2$ geschrieben werden kann.

Induktionsverankerung $n = 1$**.** Es gilt $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$.

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$**.** Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 .$$

Wir verwenden jetzt die Induktionsvoraussetzung $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(6(n+1) + n(2n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} . \end{aligned}$$

Dies ist die Induktionsbehauptung, die zu zeigen war. Also haben wir aus der Induktionsvoraussetzung die Induktionsbehauptung gefolgert.

Siehe nächstes Blatt!

2. Die *Fibonacci-Folge* F_n ist durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert.

a) Beweise die Ungleichung $F_n < 2^n$ für alle n.

Induktionsverankerung $n = 0$. Es gilt $F_0 = 0 < 2^0 = 1$. Wir bemerken, dass die Induktionsverankerung bei $n = 0$ und nicht bei $n = 1$ ist.

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$. Wir verwenden die Variante des Induktionsschritts aus Bemerkung (d). Für den Induktionsschritt $0 \mapsto 1$ ist die Induktionsbehauptung $F_1 = 1 < 2^1 = 2$ klar. Für $n \geq 1$ ist $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ und nach Induktionsvoraussetzung (für $m = n$ und $m = n - 1$) gilt $F_n < 2^n$ und $F_{n-1} < 2^{n-1}$. Es folgt $F_{n+1} < 2^n + 2^{n-1} = 2^{n-1}(2+1) < 2^{n-1} \cdot 4 = 2^{n+1}$. Also haben wir die Induktionsbehauptung gezeigt.

b) Beweise die geschlossene Formel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) .$$

Induktionsverankerung $n = 0$. Es gilt

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 .$$

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$. Wir verwenden die Variante aus Bemerkung (d). Der Induktionsschritt $0 \mapsto 1$ gilt, da

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = 1$$

ist. Wir kürzen $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ab. Es gilt $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ für $n \geq 1$, also nach Induktionsvoraussetzung (für $m = n$ und $m = n - 1$)

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda^n - \mu^n) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda^{n-1} - \mu^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda^n (1 + 1/\lambda) - \mu^n (1 + 1/\mu)) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda^{n+1} - \mu^{n+1} \right) . \end{aligned}$$

Wir haben verwendet, dass $1 + 1/\lambda = \lambda$ und $1 + 1/\mu = \mu$ gilt, was man direkt nachrechnet. Dies ist die Induktionsbehauptung, die zu zeigen war.

3. Zeige, dass jede natürliche Zahl $n > 1$ als Produkt von Primzahlen geschrieben werden kann.

Bitte wenden!

Induktionsverankerung $n = 2$. Die Zahl 2 ist eine Primzahl.

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$. Wir verwenden die Variante aus Bemerkung (d). Ist $n + 1$ eine Primzahl, so ist die Induktionsbehauptung erfüllt. Ist $n + 1$ keine Primzahl, so ist $n + 1$ ein Produkt ab von natürlichen Zahlen $a, b > 1$. Es folgt $a, b < n + 1$ und folglich ist nach Induktionsvoraussetzung $a = p_1 p_2 \dots p_M$ ein Produkt von Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_M$ und ebenso b. Deshalb ist auch ab ein Produkt von Primzahlen. Die Induktionsbehauptung ist also erfüllt.

4. Beweise, dass $n^3 + 11n$ für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ durch 6 teilbar ist.

Wegen $(-n)^3 + 11(-n) = -(n^3 + 11n)$ genügt es, die Aussage für $n \geq 0$ zu zeigen, da eine Zahl genau dann durch 6 teilbar ist, wenn ihr Negatives durch 6 teilbar ist. Deshalb genügt es, die Aussage für $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen.

Induktionsverankerung $n = 0$. Die Zahl $0^3 + 11 \cdot 0 = 0$ ist durch 6 teilbar.

Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$. Es gilt nach der Binomischen Formel

$$
\begin{aligned}
(n+1)^3 + 11(n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 11(n+1) \\
&= (n^3 + 11n) + (3n^2 + 3n) + 12 .
\end{aligned}
$$

Die Induktionsvoraussetzung besagt, dass $n^3 + 11n$ durch 6 teilbar ist. Nun ist $3n^2+3n = 3n(n+1)$ durch 6 teilbar, da $n(n+1)$ gerade ist (entweder ist nämlich n oder $n+1$ gerade). Folglich ist $(n+1)^3+11(n+1)$ als Summe von durch 6 teilbaren Zahlen ebenfalls durch 6 teilbar. Dies beweist die Induktionsbehauptung.

Alternativer Beweis. Die Aussage kann wie folgt *ohne* vollständige Induktion gezeigt werden. Wir schreiben $n = 6k + r$, wobei $k \in \mathbb{N}_0$ ist und $r \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$ der Rest modulo 6 ist. Dann ist der Rest modulo 6 von

$$
\begin{aligned}
n^3 + 11n &= n(n^2 + 11) = (6k + r)((6k + r)^2 + 11) \\
&= 6k((6k + r)^2 + 11) + r((6k)^2 + 12kr + r^2 + 11)
\end{aligned}
$$

gleich dem von $r(r^2+11)$, weil man in oben stehendem Ausdruck alle Vielfachen von 6 für die Bestimmung des Rests vergessen kann. Nun ist $r(r^2 + 11) = 0, 12, 30, 60, 108, 180$ für $r = 0, 1, 2, \dots, 5$ und hat folglich Rest 0 modulo 6. Also ist $n^3 + 11n$ durch 6 teilbar.