Funktionentheorie

R. Pandharipande

HS 2015, ETH Zürich

Hier fassen wir verschiedene Strategien und deren Resultate zur Berechnung reeller Integrale mit dem Residuenkalkül zusammen.

Satz (Typ I)

Sei $S(x)$ eine reelle rationale Funktion ohne Pole in $\mathbb{R}$ mit $\deg(S) \leq -2$. *Dann ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} b>0} \operatorname{Res}(S(z), b).$$

Strategie

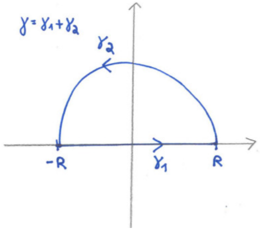
Integration der Funktion $S(z)$ über den Hilfsweg γ und Grenzwertübergang $R \to \infty$. Dabei gilt

$$\int_{\gamma_1} S(z)\,dz \to \int_{-\infty}^{\infty} S(x)\,dx$$

und

$$\int_{\gamma_2} S(z)\,dz \to 0,$$

weil $|S(z)| \leq c\frac{1}{|z|^2}$ für grosse $|z|$.



Satz (Typ II)

Sei $S(x)$ *eine reelle rationale Funktion ohne Pole in* $\mathbb{R}$ *mit* $\deg(S) \leq -2$. *Dann ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} b>0} \operatorname{Res}(S(z)e^{iz}, b).$$

und daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x)\cos(x)\,dx = \operatorname{Re}\ 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} b>0} \operatorname{Res}(S(z)e^{iz}, b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x)\sin(x)\,dx = \operatorname{Im}\ 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} b>0} \operatorname{Res}(S(z)e^{iz}, b).$$

Strategie

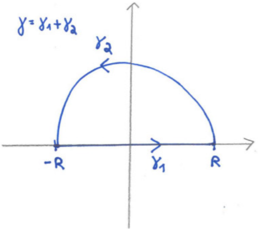
(genauso wie bei Typ I) Integration der Funktion $S(z)e^{iz}$ über den Hilfsweg γ und Grenzwertübergang $R \to \infty$. Dabei gilt

$$\int_{\gamma_1} S(z)e^{iz}\,dz \to \int_{-\infty}^{\infty} S(x)e^{ix}\,dx$$

und

$$\int_{\gamma_2} S(z)e^{iz}\,dz \to 0,$$

weil $|S(z)| \leq C\frac{1}{|z|^2}$ für grosse $|z|$ und $|e^{iz}| < 1$ für $\operatorname{Im} z > 0$.



Satz (Typ III)

Sei $S(x)$ *eine reelle rationale Funktion ohne Pole in* $]0,\infty[$ *mit* $\deg(S) \leq -2$ *und höchstens einem einfachen Pol in* 0. *Sei* $0 < a < 1$. *Dann ist*

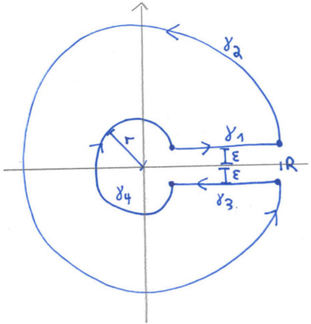
$$\int_0^\infty x^a S(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_{b \neq 0} \operatorname{Res}(z^a S(z), b).$$

Strategie

Integration der Funktion $z^a S(z)$ über den Schlüssellochweg γ und Grenzwertübergang $R \to \infty$, $\epsilon, r \to 0$. Wir verwenden den Zweig

$$z^a = e^{a \ln(|z|) + ia \arg(z)}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\arg(z) \in (0, 2\pi)$.



Dabei gilt

$$\int_{\gamma_1} z^a S(z)\, dz \to \int_0^\infty x^a S(x)\, dx$$

und

$$\int_{\gamma_3} z^a S(z)\, dz \to -e^{2\pi i a} \int_0^\infty x^a S(x)\, dx$$

weil z^a an der Linie $[0, \infty]$ um den Faktor $e^{2\pi i a}$ springt.
Die Standardabschätzungen liefern

$$\int_{\gamma_2} z^a S(z)\, dz \to 0$$

und

$$\int_{\gamma_4} z^a S(z)\, dz \to 0$$

Satz (Typ IV)

Sei $R(x, y)$ eine rationale Funktion. Dann können wir Integrale der Form $\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\, dt$ mit der Substitution $z = e^{it}$ auf komplexe Kurvenintegrale von rationalen Funktionen über den Einheitskreis zurückführen. Es gilt:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\, dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right) \frac{1}{iz}\, dz.$$

Beispiel

Sei $a > 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(t)}\,dt &= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{z+1/z}{2}}\frac{dz}{z} \\ &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1} \\ &= 4\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_1\right) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.\end{aligned}$$

wobei $z_1 = -a + \sqrt{a^2-1}$ und $z_2 = -a - \sqrt{a^2-1}$.

Übung

Berechne $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+\cos(t))^2}$.

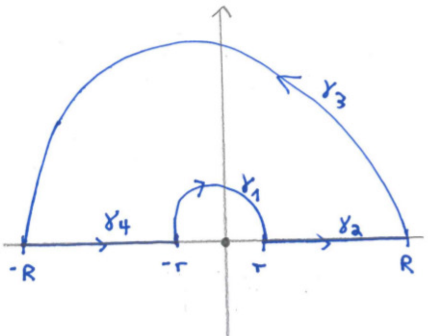
In vielen Fällen muss man diese Strategien anpassen.

Beispiel

Wir wollen

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

berechnen. Die Funktion $\frac{e^{iz}}{z}$ hat aber einen einfachen Pol in 0. Deshalb wählen wir einen Integrationsweg, der 0 in einem kleinen Halbkreis umgeht.



Beim Grenzwertübergang $R \to \infty$, $r \to 0$ erhalten wir

$$\int_{\gamma_4+\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \to 2i \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

In einer Umgebung von 0 können wir $\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + g(z)$ mit $g(z)$ analytisch um 0 schreiben. Also

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z} + \int_{\gamma_1} g(z) \to -\pi i + 0.$$

Durch Parametrisierung $\gamma_3(t) = Re^{it}$ und mithilfe von $\frac{2t}{\pi} \leq \sin(t)$ für $0 \leq t \leq \pi/2$ zeigt man

$$\int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} \, dz \to 0$$

Also

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Satz (Schwarzsches Spiegelungsprinzip)

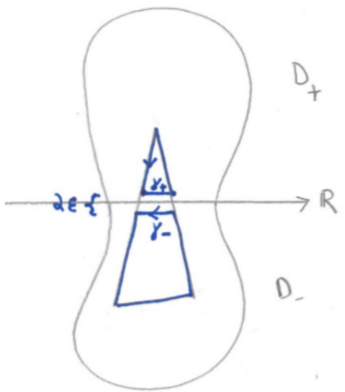
Sei D ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet (d.h. $z \in D$ genau dann, wenn $\bar{z} \in D$). Weiter sei $D_+ = \{z \in D\colon\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_- = \{z \in D\colon\ \operatorname{Im} z < 0\}$ und $D_0 = D \cap \mathbb{R}$. Ist $f : D_+ \cup D_0 \to \mathbb{C}$ stetig, $f|D_+$ analytisch und $f(D_0) \subset \mathbb{R}$, dann ist die durch

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in D_+ \cup D_0 \\ \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{für } z \in D_- \end{cases}$$

definierte Funktion $\widetilde{f} : D \to \mathbb{C}$ analytisch.

Beweisskizze.

Wir wissen schon, dass $\overline{f(\overline{z})}$ auf D_- analytisch ist. Die Funktion $\widetilde{f}$ ist stetig, wir müssen aber noch komplexe Differenzierbarkeit auf D_0 prüfen und verwenden dazu den Satz von Morera. Sei Δ ein Dreieck in D. Wir approximieren den Integrationsweg $\partial\Delta$ mit γ_+ und γ_-.



Wegen des Integralsatzes gilt

$$\int_{\gamma_+} \widetilde{f}\,dz = \int_{\gamma_-} \widetilde{f}\,dz = 0.$$

Im Grenzwert $\epsilon \to 0$ gilt

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \widetilde{f}\,dz \to \int_{\partial\Delta} \widetilde{f}\,dz,$$

weil sich die Beiträge der waagrechten Teile der Wege gegenseitig aufheben.