Musterlösung Probeklausur

Aufgabe I

Da f auf ganz $D = B(0, 2)$ analytisch ist, ist der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um 1 mindestens 1. Dies folgt aus dem Beweis des Satzes zur Potenzreihenentwicklung (Satz 11), denn dort zeigte man für eine analytische Funktion f auf $U \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in U$, dass für jedes $R > 0$ mit $\overline{B}(z_0, R) \subset U$ der Konvergenzradius der Potenzreihe von f um z_0 mindestens R ist.

(i) Da $|-1| = 1$ nicht kleiner als 1 ist, muss die Reihe im Allgemeinen nicht konvergieren. Hierzu sollten wir eine Funktion mit Konvergenzradius genau 1 um 1 finden, die auf D definiert ist. Wähle $f(z) = (2-z)^{-1}$, dann ist f analytisch auf D, aber die Potenzreihenentwicklung um 1 lautet

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k.$$

Also ist $\alpha_n = 1$, aber die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ist nicht konvergent.

(ii) Da $|\frac{4}{7}| < 1$ ist die Reihe immer konvergent.

(iii) Wir wissen, dass die Potenzreihen der Ableitungen von f um 1 den gleichen Konvergenzradius haben wie die Potenzreihe von f. Wir schreiben die ersten zwei Ableitungen explizit:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-1)^n, \\ f'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n (z-1)^{n-1}, \\ f''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2-n)\alpha_n (z-1)^{n-2}. \end{aligned}$$

Die gewünschte Reihe erhalten wir als eine Kombination von f' und f'':

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \alpha_n (z-1)^n = (z-1)^2 f''(z) + (z-1) f'(z).$$

Da die rechte Seite aus Funktionen, deren Tailorreihe Konvergenzradius mindestens 1 um 1 hat, zusammengesetzt ist, hat die Potenzreihe der Funktion selbst Konvergenzradius mindestens 1 und ist durch die Potenzreihe auf der linken Seite definiert. Also konvergiert die Summe immer, da $|\frac{1}{3}| < 1$.

Aufgabe II

(i) Wir haben $f(z) = 0$ genau dann, wenn $z + 2 = 0$, also genau eine Nullstelle bei $z = -2$. Für die Polstellen haben wir $z^2 - 4z + 3 = 0$, also gibt es einfache Pole bei $z = 3$ und $z = 1$. Für die Residuen berechnen wir

$$\mathrm{Res}(f; 1) = \frac{z+2}{2z-4}\Big|_{z=1} = \frac{3}{-2}, \mathrm{Res}(f; 3) = \frac{5}{2}.$$

(ii) Nach dem Residuensatz ist entscheidend, welche der beiden Polstellen $z = 1, 3$ im Inneren der Kreisscheibe D mit Rand C liegen. Alle vier möglichen Kombinationen sind realisierbar und wir berechnen

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \cdot \begin{cases} 0, \text{ für } 1 \notin D, 3 \notin D \\ \frac{-3}{2}, \text{ für } 1 \in D, 3 \notin D \\ \frac{5}{2}, \text{ für } 1 \notin D, 3 \in D \\ 1, \text{ für } 1 \in D, 3 \in D. \end{cases}$$

(iii) Man berechnet

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\frac{1\cdot(z^2-4z+3)-(z+2)(2z-4)}{(z^2-4z+3)^2}}{\frac{z+2}{z^2-4z+3}} = \frac{1}{z+2} - \frac{2z-4}{z^2-4z+3}.$$

Diese Funktion hat Polstellen bei $z = 1, 3$ und $z = -2$ mit Residuen

$$\mathrm{Res}(f'/f; -2) = 1, \mathrm{Res}(f'/f; 1) = -\frac{2z-4}{2z-4}\Big|_{z=1} = -1 = \mathrm{Res}(f'/f; 3).$$

Von den 8 Teilmengen von $P = \{-2, 1, 3\}$ können alle die Menge $P \cap D$ für eine Kreisscheibe D sein, ausser $\{-2, 3\}$ (da Kreise konvex sind). Nach dem Residuensatz sind die möglichen Werte des Kurvenintegrals also

$$\int_C f(z)dz \in 2\pi i\{-2, -1, 0, 1\}.$$

Aufgabe III

In beiden Aufgabenteilen verwenden wir, dass die zu integrierenden Funktionen gerade sind, also wir das Integral auch über ganz $\mathbb{R}$ berechnen können, wenn wir einen Faktor $\frac{1}{2}$ einfügen.

(i) Dies ist ein klassisches Integral vom Typ II aus den Vorlesungsnotizen, da der Grad des Nenners grösser gleich 2 ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(2\pi i \mathrm{Res}(\frac{e^{iz}}{z^2+1}; i)\right) \\ &= \pi \mathrm{Re}\left(i\frac{e^{i\cdot i}}{2i}\right) \\ &= \pi\frac{e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

(ii) Das Integral ist von Typ I, da der Grad der rationalen Funktion gleich -2 ist. Die Polstellen liegen bei $\pm i, \pm 3i$ und zur Berechnung der Residuen können wir wieder die Formel $\mathrm{Res}(f/g; z) = f(z)/g'(z)$ verwenden, da alle Nullstellen des Nenners einfach sind. Beachte hier

$$\frac{d}{dz}(z^2+1)(z^2+9) = 4z^3 + 20z$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}dx \\ &= \frac{1}{2}2\pi i\left(\operatorname{Res}(\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}, i) + \operatorname{Res}(\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}, 3i)\right) \\ &= \pi i\left(\frac{i^2}{4i^3+20i} + \frac{(3i)^2}{4(3i)^3+20(3i)}\right) \\ &= \pi i\left(-\frac{1}{16i}+\frac{3}{16i}\right) = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Aufgabe IV

(i) Einfache Antwort: $f(z) = 1$, komplexere Antwort: $f(z) = \exp(2\pi i z)$.

(ii) Nein, betrachte die ganze Funktion $f(z) = \exp(\pi i z)$. Dann ist $f^2 = \exp(2\pi i z)$ periodisch, aber $f(1) = -1 \neq f(0) = 1$.

(iii) Nein. Ist f konstant, so hat $g = f(1/z)$ eine hebbare Singularität bei 0. Ist f nicht konstant, zeigen wir mit dem Satz von Casorati-Weierstrass, dass die Singularität bei 0 wesentlich ist. Beachte dazu, dass jede punktierte Kreisscheibe $D = B(0,r) \setminus \{0\}$ um 0 von $z \longmapsto \frac{1}{z}$ bijektiv auf das Komplement $K = \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, r^{-1})$ abgebildet wird. Da f ganz und nicht konstant ist, ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$. Gleichzeitig gilt aber wegen der Periodizität von f, dass $f(\mathbb{C}) = f([\mu, \mu+1) + i\mathbb{R})$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$. Für $\mu > r^{-1}$ ist die Menge $[\mu, \mu+1) + i\mathbb{R}$ aber ganz in K enthalten, also ist $g(D)$ dicht in $\mathbb{C}$. Nach Casorati-Weierstrass ist die Singularität von g bei 0 also wesentlich.

Aufgabe V

(i) Wir gehen in zwei Schritten vor: zunächst bilden wir Q mit einer invertierbaren analytischen Abbildung f_1 auf die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ ab. Dies erreichen wir durch $f_1(z) = z^2$. Mit der Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen sieht man, dass diese Abbildung bijektiv ist. Von der oberen Halbebene kommen wir durch die sogenannte Cayley-Transformation

$$f_2(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

bijektiv auf die offene Einheitskreisscheibe D. Die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$f_2^{-1}(z) = i\frac{1+z}{1-z}.$$

Die gesuchte Funktion ist $f = f_2 \circ f_1$.

(ii) Gäbe es eine solche Funktion, dann wäre $f \circ g : \mathbb{C} \longrightarrow D$ eine beschränkte, ganze Funktion, also konstant. Da f bijektiv ist, wäre also auch g konstant.

Aufgabe VI

In beiden Aufgabenteilen nutzen wir, dass Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion harmonisch sind.

(i) Suchen wir eine holomorphe Funktion f, so dass $\mathrm{Im}(f) = 0$ auf B, also $f(B) \subset \mathbb{R}$. Hier können wir z.B. $f(z) = z^2$ nehmen, denn $f(x) = x^2 \in \mathbb{R}, f(ix) = -x^2 \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$. Wir erhalten $u(x, y) = \mathrm{Im}(f(x + iy)) = 2xy$.
(ii) Sei $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$ ein komplexer Logarithmus mit $\log(1) = 0$. Dann gilt

$$\log(x) = \ln(x), \log(ix) = \ln(x) + \pi i,$$

wobei $\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ der übliche (natürliche) Logarithmus ist. Dann ist $u(x, y) = \mathrm{Im}(\log(x + iy))/\pi$ eine mögliche Funktion mit den gewünschten Eigenschaften, da log analytisch ist. Beachte, dass $\mathrm{Im}(\log(x+iy)) = \mathrm{Arg}(x+iy)$ gerade eine lokale Darstellung der Argumentfunktion (im Sinne der Polarkoordinatendarstellung) ist.

Aufgabe VII
(i) Da $f(z) = 3$ analytisch auf $\mathbb{C}$ ist, ist das Integral wegunabhängig aufgrund der Homotopieinvarianz von Kurvenintegralen und da $\mathbb{C}$ konvex, also einfach zusammenhängend, ist. Es gilt $\gamma(0) = i, \gamma(1) = e + ie^{-1}$. Wir integrieren entlang der Verbindungsstrecke s von $\gamma(0)$ nach $\gamma(1)$ und erhalten

$$\int_\gamma 3dz = \int_s 3dz = 3(e + ie^{-1} - i).$$

(ii) Es gilt $\gamma(t) = e^{it}$ und wir können direkt die Definition einsetzen

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{3\pi} (3 + e^{-it})ie^{it}dt = \left(3e^{it} + it\right)\Big|_{t=0}^{t=3\pi} = 3(-1-1) + 3i\pi = -6 + 3i\pi.$$

(iii) Auch hier ist die Funktion f ganz und $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$. Wir integrieren also eine analytische Funktion auf einem konvexen Gebiet entlang einer geschlossenen Kurve. Also ist das Kurvenintegral gleich 0 aufgrund der Homotopieinvarianz des Integrals.

Aufgabe VIII
(i) Wir verwenden geometrischen Reihen, um die Potenzreihenentwicklung von f um 0 zu berechnen:

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \frac{1}{z^2 - 4} = z^3 \frac{-1}{4} \frac{1}{1 - (z^2/4)} \\ &= z^3 \frac{-1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{4}\right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} -2^{-2m-2} z^{2m+3} \\ &= -\frac{1}{4} z^3 - \frac{1}{16} z^5 + \dots \end{aligned}$$

(ii) Nein. Gäbe es eine solche Funktion g, dann wäre

$$\mathrm{ord}(f; 0) = \mathrm{ord}(g \cdot g; 0) = 2\mathrm{ord}(g; 0),$$

aber wie wir oben sehen gilt $\operatorname{ord}(f;0) = 3$. Da 2 kein Teiler von 3 ist, erhalten wir einen Widerspruch.
(iii) Berechnen wir zunächst die Potenzreihenentwicklung von df/dz um 0:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} -\frac{1}{4} 2^{-2\tilde{m}}(2\tilde{m}+3) z^{2\tilde{m}+2} \\ &= -\frac{3}{4} z^2 - \frac{5}{16} z^4 + \dots \end{aligned}$$

Wir sehen, dass wir einen Faktor z^2 ausklammern können, also $f'(z) = z^2 h(z)$ mit h analytisch um 0 mit $h(0) = -\frac{3}{4}$. Sei $\log : U \longrightarrow \mathbb{C}$ ein komplexer Logarithmus, der um $-3/4$ definiert ist, dann ist

$$g(z) = z \exp(\log(h(z))/2)$$

eine in einer Umgebung von 0 definierte analytische Funktion mit

$$g(z)^2 = z^2 \exp(\log(h(z))) = z^2 h(z) = f'(z)$$

für $|z|$ hinreichend klein.
Anmerkung: Diese Strategie funktioniert nicht bei (i), da wir dort keine gerade Potenz von z ausklammern können, so dass die verbleibende Funktion h den Punkt 0 *nicht* nach 0 abbildet. Ein komplexer Logarithmus kann aber nicht in einer Umgebung von 0 definiert werden.