Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt
C. Schießl

Übungsblatt 0

Abgabe am 22. September 15

In diesem Übungsblatt wiederholen wir das grundlegende Rechnen mit komplexen Zahlen.

Aufgabe 1.

(i) Berechne in der Form $a + bi$:

$$\frac{1+i}{1-i} \qquad (1+i\sqrt{3})^3 \qquad (1+i)^4$$

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5} \qquad (1+i)^n + (1-i)^n$$

(ii) Stelle diese komplexen Zahlen in der Form $re^{2\pi it}$ dar:

$$4i \qquad -3$$

$$1+i \qquad 1+\sqrt{3}$$

(iii) Finde alle Lösungen der Gleichungen in der Form $a + bi$:

$$x^3 = 1 \qquad x^4 = -2$$

Aufgabe 2. Zeige für $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$:

(i) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

(ii) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

Aufgabe 3.

(i) Beschreibe die Teilmenge der komplexen Zahlen z, die jeweils die folgenden Bedingungen erfüllen:

a)
$$1 < |3z + 4| < 2$$

b)
$$|z - 1| < |z|$$

c)
$$\mathrm{Re}(iz + 2) \geq 0$$

d)
$$|\mathrm{Re}\ z| < |z|$$

e)
$$|z - 1| + |z + 1| = 3$$

f)
$$|z| = \mathrm{Re} z + 1$$

g)

$$\mathrm{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0 \quad (z\neq z_2)$$

h)

$$\mathrm{Re}\frac{z-z_1}{z-z_2}=0 \quad (z\neq z_2)$$

In den letzten beiden Teilaufgaben sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zwei feste, voneinander verschiedene komplexe Zahlen.

(ii) Zeige, dass z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$ die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden, falls $z_1+z_2+z_3=0$ und $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.

⋆ **Aufgabe 4.**

(i) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$I=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass $\mathbb{H}=\{a\,\mathrm{Id}+bI+cJ+dK \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ ein Unterring von $M_2(\mathbb{C})$ mit den Relationen $I^2=J^2=K^2=-1$ und $IJ=K$ ist.

(ii) Für $q=a+bI+cJ+dK$ nennen wir $\overline{q}=a-bI-cJ-dK$ die Konjugierte und $\mathrm{N}(q)=q\overline{q}$ die Norm von q. Zeige:

$$\mathrm{N}(q)=(a^2+b^2+c^2+d^2)\mathrm{Id} \qquad \overline{q_1}\cdot\overline{q_2}=\overline{q_2q_1} \qquad \mathrm{N}(q_1q_2)=\mathrm{N}(q_1)\mathrm{N}(q_2)$$

(iii) Zeige, dass $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper ist (das heisst jedes Element $\neq 0$ ist invertierbar), aber nicht kommutativ ist.

(iv) Zeige, dass die Gleichung $x^2=-1$ unendlich viele Lösungen $x\in\mathbb{H}$ hat.

(v) Die quaternionische Norm wird benutzt, um zu zeigen, dass jede natürliche Zahl als Summe von 4 Quadraten geschrieben werden kann (der berühmte *4 Quadrate-Satz von Lagrange*), zum Beispiel $42=5^2+3^2+2^2+2^2$. Suche und studiere einen Beweis, der Quaternionen benutzt!

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.