Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt
C. Schießl

Übungsblatt 1

Abgabe am 29. September 15

Aufgabe 1 (Präsenzaufgabe, Erste Übungsstunde)**.** Sei $\mathbb{F}$ ein Körper, der $\mathbb{R}$ als einen Unterkörper enthält. Das heisst $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{F}$, die abgeschlossen unter Addition und Multiplikation ist und so dass die Einschränkung dieser Operationen auf $\mathbb{R}$ gerade die übliche Addition und Multiplikation von $\mathbb{R}$ ist. Zeige:

- $\mathbb{F}$ ist in natürlicher Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
- Ist $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{F} = 2$, dann existiert ein $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismus $\varphi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{C}$ so dass $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für $a, b \in \mathbb{F}$.

Aufgabe 2.
Bestimme sowohl mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen als auch direkt mit der Definition, an welchen Stellen folgende Funktionen komplex differenzierbar sind und berechne gegebenenfalls die Ableitung:

(i) $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$
(ii) $f(x + iy) = ax + iby$ (für $a, b \in \mathbb{C}$)

Aufgabe 3. Welche dieser Funktionen können Realteil einer analytischen Funktion sein? Gib diese gegebenenfalls an:

(i) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 1$
(ii) $u(x, y) = e^x \sin(y)$
(iii) $u(x, y) = e^x \sinh(y)$

Aufgabe 4. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Sei $D^- = \{\overline{z} : z \in D\}$. Zeige, dass dann auch $g\colon D^- \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ analytisch ist. Was ist die Ableitung?

Aufgabe 5.

(i) Leiten Sie die Polarform der Cauchy-Riemann Gleichungen her:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

(ii) Überprüfen Sie, dass für jede ganze Zahl m die Funktionen

$$u(re^{i\theta}) := r^m \cos(m\theta), \quad v(re^{i\theta}) := r^m \sin(m\theta)$$

die Cauchy-Riemann Gleichungen erfüllen.

Aufgabe 6. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine *stückweise differenzierbare Kurve* in U von $p \in U$ nach $q \in U$ in U ist eine stetige Abbildung $\phi : [0, 1] \longrightarrow U$ mit $\phi(0) = p$, $\phi(1) = q$, so dass es $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ gibt derart, dass $\phi|_{(t_{i-1},t_i)}$ differenzierbar ist für alle $i = 1, \ldots, n$.

(i) Ist ϕ eine stückweise differenzierbare Kurve von $p \in U$ nach $q \in U$ und ψ eine solche Kurve von q nach $r \in U$, dann ist

$$\psi * \phi : [0,1] \longrightarrow U, t \longmapsto \begin{cases} \phi(2t) & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ \psi(2t-1) & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine stückweise differenzierbare Kurve in U von p nach r.

(ii) Die Relation $\sim$ auf U definiert für $p, q \in U$ durch

$$p \sim q \iff \text{Es existiert eine stückweise differenzierbare Kurve von } p \text{ nach } q$$

ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind offene Teilmengen von U.

(iii) Folgere: Ist U zusammenhängend, dann können je zwei Punkte in U durch eine stückweise differenzierbare Kurve verbunden werden.
Erinnerung: $U \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, falls für alle $A, B \subset \mathbb{R}^n$ offen und disjunkt mit $U \subset A \cup B$ folgt $A \cap U = \emptyset$ oder $B \cap U = \emptyset$.

(iv) Schliesse, dass für eine offene, zusammenhängende Menge $U \subset \mathbb{C}$ jede analytische Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f' = 0$ konstant ist.

$\star$ **Aufgabe 7.** Mit den komplexen Zahlen und den Quaternionen haben wir Schiefkörper auf 2- und auf 4-dimensionalen Vektorräumen über $\mathbb{R}$ konstruiert. Können wir ein solches Produkt auch auf $\mathbb{R}^3$ konstruieren? Präziser: Gibt es ein $\mathbb{R}$-bilineares Produkt $\star$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, sodass es ein neutrales Element $1 \in \mathbb{R}^3$ gibt und jedes Element $\neq 0$ bezüglich $\star$ invertierbar ist? (Hinweis: Nimm ein $a \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \mathbb{R} \cdot 1$ und zeige, dass die Abbildung $x \longrightarrow a \star x$ einen reellen Eigenwert hat)

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.