

Übungsblatt 10

Abgabe am 1. Dezember 15

Aufgabe 1. Berechne die folgenden Integrale:

(i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$$

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - 1}{x^4 + 6x^2 + 25} dx$$

(iii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 2} dx$$

Aufgabe 2. Berechne das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5 - 4 \cos(t)} dt.$$

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in U$. Seien $f, g: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Zeige folgende Formeln zur Berechnung von Residuen:

(i) Ist $\text{ord}(f, a) \geq -1$, so gilt $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$.

(ii) Ist a ein Pol der Ordnung k von f , so gilt

$$\text{Res}(f, a) = \frac{h^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

mit $h(z) = (z - a)^k f(z)$.

(iii) Ist f holomorph an a und hat g eine einfache Nullstelle in a so gilt

$$\text{Res}(f/g, a) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(iv) Hat f in a einen Pol erster Ordnung und ist g analytisch in einer Umgebung von a , so gilt

$$\text{Res}(fg, a) = g(a)\text{Res}(f, a).$$

(v)

$$\text{Res}(f', a) = 0$$

★ **Aufgabe 4.** Bestimme alle Paare ganzer Funktionen f, g mit $f^2 + g^2 = 1$.