Übungsblatt 11

Abgabe am 8. Dezember 15

Aufgabe 1. Berechne

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2(x)}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Aufgabe 2. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \le k < n$. Zeige, dass

$$\int_0^\infty \frac{t^{2k}}{1+t^{2n}}\,dt = \frac{\pi}{2n\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}.$$

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f_n\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge analytischer Funktionen, die lokal gleichmässig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Zeige, dass f analytisch ist und die Folge der Ableitungen f_n' lokal gleichmässig gegen f' konvergiert. Hinweis: Cauchysche Integralformel

Aufgabe 4.

(i) Sei $L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Zeige, dass die *Eisensteinreihe*

$$G_n = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^n}$$

für $n \in \mathbb{Z}$ und $n \ge 3$ absolut konvergiert.

(ii) Zeige, dass die Laurententwicklung der Weierstrassfunktion um $z = 0$ wie folgt aussieht:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2(n+1)}z^{2n}$$

⋆ **Aufgabe 5.** Versuche einen Integrationsweg zu finden, um

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{x^m+1}\,dx$$

für $0 \le n \le m-2$ zu berechnen. Hinweis: Ein Stück Kuchen kann helfen.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.