Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt
C. Schießl



# Übungsblatt 12

Abgabe am 15. Dezember 15

**Aufgabe 1.** Zeige

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2(\phi)}\, d\phi = \pi\sqrt{2}$$

und

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin^2(\phi)}{2+\cos(\phi)}\, d\phi = \pi(2-\sqrt{3}).$$

**Aufgabe 2.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(i) Je zwei stetige Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \longrightarrow U$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ sind homotop relativ zu Anfangs- und Endpunkt.

(ii) Jede geschlossene Kurve $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ ist homotop zu einer konstanten Kurve relativ zu $\gamma(0) = \gamma(1)$.

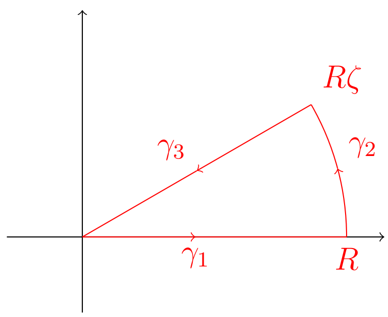
**Aufgabe 3.** Zeige, dass jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist.

**Aufgabe 4.** Zeige, dass $B(0,1) \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

**Aufgabe 5.** Zeige

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^n}{x^m+1}\, dx = \frac{\pi}{m \sin((n+1)/m\ \pi)}$$

für $0 \leq n \leq m-2$. Sei $R > 0$ und $\zeta = e^{2\pi i/m}$. Integriere $f(z) = \frac{z^n}{z^m+1}$ über die Strecke $\gamma_1$ von 0 bis $R$, den Kreisbogen $\gamma_2$ von $R$ bis $\zeta R$ und die Strecke $\gamma_3$ von $\zeta R$ nach 0.




Nutze die Symmetrie $f(\zeta z) = \zeta^n f(z)$.

⋆ **Aufgabe 6.** Zeige für $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin\frac{\nu\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

---

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.