Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt
C. Schießl

Übungsblatt 13

Keine Abgabe

Auf diesem Übungsblatt entwickeln wir in Aufgabe 1 Techniken, um mit Möbiustransformationen (auch "gebrochen-lineare Funktionen", "linear fractional transformations" genannt) zu arbeiten. Als Hilfestellung könntest du auch zuerst das entsprechende Kapitel in einem Lehrbuch, zum Beispiel Gamelin, II.7 durcharbeiten, um die konkreten Aufgaben 2, 3 und 4 zu lösen.

Aufgabe 1. Jeder Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

aus $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ ordnen wir die meromorphe Funktion

$$\phi_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

zu. Diese Funktion können wir als Endomorphismus $\mathbb{C} \coprod \infty \longrightarrow \mathbb{C} \coprod \infty$ auffassen. Wir nennen solche Abbildungen *Möbius-Transformationen*.

(i) Seien M, $N \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$. Zeige $\phi_M \circ \phi_N = \phi_{MN}$. Folgere daraus eine konkrete Formel für ϕ_M^{-1}.

(ii) Zeige, dass es für paarweise verschiedene z_1, z_2, z_3 aus $\mathbb{C} \coprod \infty$ genau eine Möbiustransformation ϕ_{z_1,z_2,z_3} mit $\phi(z_1) = 0$, $\phi(z_2) = 1$, $\phi(z_3) = \infty$ gibt. Gib eine konkrete Formel für ϕ_{z_1,z_2,z_3} an.

(iii) Für paarweise verschiedene z_1, z_2, z_3, $z_4 \in \mathbb{C}$ definieren wir das Doppelverhältnis

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \phi_{z_2,z_3,z_4}(z_1).$$

Zeige, dass

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4}\frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$$

(iv) Sei T eine Möbiustransformation. Zeige

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

(v) Seien w_1, w_2, w_3, $w_4 \in \mathbb{C}$ ebenfalls alle verschieden. Zeige, dass es genau dann eine Möbiustransformation T mit $T(z_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$ gibt, wenn

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

(vi) Zeige, dass $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn alle z_i auf einer Gerade oder einem Kreis liegen.
Hinweis: Fasskreisbogen

(vii) Folgere, dass eine Möbiustransformation eine Gerade oder einen Kreis wieder auf eine Gerade oder einen Kreis abbildet.

Aufgabe 2. Finde eine Möbiustransformation T mit $T(-1) = -1$, $T(0) = i$, $T(1) = 1$.

Aufgabe 3. Gibt es eine Möbiustransformation T mit $T(0) = -1$, $T(i) = 0$, $T(2i) = \frac{1}{3}$ und $T(1) = 1$?

Aufgabe 4. Wir betrachten die Möbiustransformation

$$T(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

Bestimme die Bilder der Punktmengen

$$A = \{\operatorname{Re} z = 0\} \qquad B = \{\operatorname{Im}(z) = 0\} \qquad C = \{\operatorname{Re} z > 0\} \qquad D = \{|z| < 1\}$$

unter der Abbildung T.

⋆ **Aufgabe 5.** Bestimme möglichst konkret die Automorphismengruppe der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$. Hinweis: Du kannst das Problem zum Beispiel auf die Automorphismengruppe der Einheitskreisscheibe reduzieren.

Dieses Übungsblatt wird nicht mehr abgegeben, es wird aber eine Musterlösung geben.