Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt
C. Schießl

Übungsblatt 2

Abgabe am 6. Oktober 15

Aufgabe 1. Reelle Funktionen $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stellen wir uns üblicherweise als Graphen $\{(x, g(x)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vor. Bei einer komplexen Funktion wäre dieser Graph aber eine Teilmenge des vierdimensionalen Raums $\mathbb{C}^2$. Deshalb müssen wir uns anders behelfen. Verschiedene Methoden eine komplexe Funktion $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, w = f(z)$ darzustellen wären:

(i) Man stellt sich die Funktion f als Verformung der Zahlenebene f vor. Um diese zu zeichnen, betrachtet man die Bilder der Gitternetze $\mathrm{Re}\, z =$ konstant, $\mathrm{Im}\, z =$ konstant oder des Polarkoordinatennetzes $r =$ konstant, $\phi =$ konstant.

(ii) Man zeichnet ein "Höhenlinienbild" von f, das heisst, man zeichnet die Urbilder der Gitternetze $\mathrm{Re}\, w =$ konstant, $\mathrm{Im}\, w =$ konstant.

(iii) Man zeichnet den (dreidimensionalen) Graphen der Funktion $|f|$.

Führe diese Methoden für $f(z) = z^3$ durch. Aus der Vorlesung wissen wir, dass f analytisch, also eine konforme Abbildung ist. Wo an deinen Zeichnungen kann man das auch erkennen?

Aufgabe 2. Sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Zeige, dass f konstant sein muss, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $\mathrm{Re}\, f =$ konstant
- $\mathrm{Im}\, f =$ konstant
- $|f| =$ konstant

Aufgabe 3.

(i) Sei $A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} nz^n$. Berechne von Hand die Potenzreihenentwicklung von A^2 bis zur Ordnung 5.

(ii) Zeige, dass $A(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ für $|z| < 1$.

(iii) Wir definieren die Bernoullizahlen B_n durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Berechne B_n für $n \leq 4$.

(iv) Berechne die Konvergenzradien von

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

Aufgabe 4. Gibt es eine komplexe Wurzelfunktion? Genauer: Gibt es eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f(z)^2 = z$ für alle $z \neq 0$? Hinweis: Zeige zuerst: gäbe es eine solche Funktion, könnte sie so gewählt werden, dass sie $f(zw) = f(z)f(w)$ für alle $z, w \neq 0$ erfüllt.

⋆ **Aufgabe 5.** Untersuche die Konvergenz der folgenden Reihen auf dem Konvergenzradius, dass heisst für $|z| = 1$:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$

Hinweis: Abelsche partielle Summation

⋆ **Aufgabe 6.** Versuche eine Definition der quaternionischen Ableitung analog zur komplexen Ableitung zu finden und untersuche die Funktion $f\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, $f(h) = h^2$ mit deiner Definition auf quaternionische Differenzierbarkeit.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.