Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt
C. Schießl

Übungsblatt 5

Abgabe am 27. Oktober 15

Aufgabe 1. Berechne

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz$$

für

(a) $C = \{z : |z-2| = 1\}$
(b) $C = \{z : |z-2| = 3\}$
(c) $C = \{z : |z-2| = 5\}$

Aufgabe 2. (i) Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Sei ϕ eine C^1-Homotopie in U zwischen den Kurven

$$\gamma, \widehat{\gamma} : [0,1] \longrightarrow U.$$

Beweise, dass

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\widehat{\gamma}} f(z)dz.$$

(ii) Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und γ eine geschlossene Kurve. Zeige, dass $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

(iii) Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet (das heisst es existiert ein $z_0 \in U$ so dass für jedes $z \in U$ das Liniensegment von z_0 nach z vollständig in U liegt). Sei auch γ eine geschlossene Kurve in U und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Zeige, dass $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Aufgabe 3. (a) Für $R > 0$ definiere man $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < R\}$. Zeige

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}.$$

(b) Zeige, dass für $R > 1$ das Integral

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$$

von R unabhängig ist.

(c) Verwende den Integralsatz und die Integralformel von Cauchy sowie Partialbruchzerlegung, um für grosse R

$$\int_{\partial D_R} \frac{\mathrm{d}z}{z^4+1}$$

zu berechnen.

Aufgabe 4. Berechne

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz.$$

⋆ **Aufgabe 5.** Sei f analytisch auf $B(z_o, r)$ für $r > 0$, mit $f(z_0) = 0$ aber $f'(z_0) \neq 0$. Man zeige für genügend kleine ϵ, dass

$$\int_{\partial B(z_0,\epsilon)} \frac{dz}{f(z)} = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}$$

gilt.
Hinweis: Betrachte noch einmal den Beweis der Cauchy-Integralformel.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.