Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt
C. Schießl

Übungsblatt 6

Abgabe am 3. November 15

Aufgabe 1. Berechne für $a, b \in \mathbb{C}$ und $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ das Integral

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m}$$

in Abhängigkeit von r. **Beachte:** Für welche r ist das Integral definiert?

Aufgabe 2. Zeige

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)^{2n}\, dt = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

durch Auswertung des Integrals

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz.$$

Aufgabe 3.

(i) Gibt es beschränkte, nicht-konstante, analytische Funktionen $\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$?

(ii) Gibt es ganze Funktionen $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit beschränktem Realteil?

Aufgabe 4. Im Folgenden wollen wir den Wert der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mit Hilfe von komplexen Kurvenintegralen der Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(\pi z)}$ bestimmen.

(i) Zeige, dass f eine analytische Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ definiert.

(ii) Sei $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, die an der Stelle $z_0 \in U$ eine Nullstelle vom Grad d hat. Zeige, dass die Funktion $\tilde{h}(z) = g(z)/(z - z_0)^d$ definiert auf $U \setminus \{z_0\}$ eine stetige Fortsetzung h auf U hat mit $h(z_0) \neq 0$. Betrachte hierzu die Potenzreihenentwicklung von g um z_0. Zeige, dass h wieder analytisch ist. Was ist die Potenzreihe von h um z_0?

(iii) Sei $0 < \epsilon < 1/2$. Verwende den letzten Aufgabenteil um zu zeigen

$$\int_{\partial B(n,\epsilon)} f(z)dz = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} i, & \text{für } n = 0 \\ (-1)^n \frac{2i}{n^2}, & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

(iv) Für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ betrachte das achsenparallele Rechteck R_n mit Eckpunkten $\pm(n + 1/2) \pm i(n + 1/2)$ in $\mathbb{C}$. Zeige, dass die Folge

$$\left(\int_{\partial R_n} f(z)dz \right)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$$

für $n \longrightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

(v) Kombiniere die vorigen Aufgabenteile und beweise, dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-1)^n \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(vi) Schlussfolgere, dass
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 5. Sei $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion und $p(z)$ ein Polynom von Grad n, sodass $|f(z)| \leq |p(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass f ein Polynom vom Grad höchstens n ist. Hinweis: Cauchy-Abschätzungen.

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.