Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt
C. Schießl

Übungsblatt 7

Abgabe am 10. November 15

Aufgabe 1.

(i) Sei $p(z) = z^n + e_1 z^{n-1} + \cdots + e_{n-1}z + e_n$ ein normiertes Polynom von Grad n mit Nullstellen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ (eine d-fache Nullstelle kommt in dieser Liste also d Mal vor). Zeige:

$$\begin{aligned}
e_1 &= -\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \\
e_2 &= \sum_{i<j} \zeta_i \zeta_j \\
e_3 &= -\sum_{i<j<k} \zeta_i \zeta_j \zeta_k \\
&\ldots \\
e_n &= (-1)^n \zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_n
\end{aligned}$$

(ii) Sei $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ eine n-te Einheitswurzel. Berechne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^k \qquad\qquad \prod_{k=0}^{n-1} \epsilon^k$$

Aufgabe 2. (i) Berechne die Potenzreihenentwicklung der Funktionen e^z und $1/z$ um $z = 1$ bis zur Ordnung 3.

(ii) Leite daraus die Potenzreihenentwicklung von e^z/z um $z = 1$ bis zur Ordnung 3 her.

(iii) Berechne

$$\int_{|z-\frac{3}{2}|=1} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\, dz.$$

Aufgabe 3.

(i) Zeige das Minimumsprinzip: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch und nicht-konstant. Hat f ein lokales Betragsminimum in a, so ist notwendigerweise $f(a) = 0$.

(ii) Folgere hieraus den Fundamentalsatz der Algebra.

Aufgabe 4. Seien D die offene Einheitskreisscheibe und $f : D \longrightarrow D$ eine nichtkonstante analytische Abbildung, so dass $f(0) = 0$.

(a) Beweise, dass
  (i) $\forall z \in D \ \ |f(z)| \leq |z|$.
  (ii) $|f'(0)| \leq 1$.

(b) Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  (i) Es existiert $z_0 \in D \setminus \{0\}$, sodass $|f(z_0)| = |z_0|$.

(ii) $|f'(0)| = 1$.

(iii) Es existiert $\vartheta \in \mathbb{R}$, sodass $f(z) = ze^{i\vartheta}$ für alle $z \in D$ gilt.

Hinweis: Betrachte die Abbildung $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ und verwende das Maximumprinzip.

⋆ **Aufgabe 5.** Zeige, dass alle Automorphismen der (offenen) Einheitskreisscheibe D (das heisst alle analytischen Bijektionen $\phi\colon D \longrightarrow D$ mit analytischer Umkehrfunktion) von der Form

$$\phi(z) = \lambda \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$

für $a \in D$ und $\lambda \in \partial D$ sind. (Hinweis: Aufgabe 4)

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.