Prof. R. Pandharipande
J. Schmitt
C. Schießl

Übungsblatt 9

Abgabe am 24. November 15

Aufgabe 1.

(i) Sei $f : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit einem Pol der Ordnung $k \geq 1$ bei a. Dann gibt es für jedes $R > 0$ ein $r > 0$ mit

$$f(B(a,r) \setminus \{a\}) \subset B(0, R, \infty),$$

das heisst $|f(z)| > R$ für $|z-a| < r$.

(ii) Umgekehrt gibt es für jedes $r > 0$ mit $B(a,r) \subset U$ ein $R > 0$, so dass

$$B(0, R, \infty) \subset f(B(a,r) \setminus \{a\}),$$

das heisst alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > R$ sind Bilder von komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < r$.

(iii) Bestimme die Art der Singularität von $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z^2+1}\right)$ in $z_0 = i$.

Aufgabe 2. Sei a eine ausserwesentliche Singularität der analytischen Funktionen $f, g \colon U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ (das heisst a ist eine isolierte Singularität, die nicht wesentlich ist). Zeige, dass dann a auch eine ausserwesentliche Singularität der Funktionen $f \pm g$, fg und $\frac{f}{g}$ (falls $g \neq 0$) ist. Zeige die Formeln

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(f \pm g; a) &\geq \min\{\operatorname{ord}(f; a), \operatorname{ord}(g; a)\} \\ \operatorname{ord}(fg; a) &= \operatorname{ord}(f; a) + \operatorname{ord}(g; a) \\ \operatorname{ord}(\frac{f}{g}; a) &= \operatorname{ord}(f; a) - \operatorname{ord}(g; a) \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Zeige folgende komplexe Version der Regeln von L'Hospital: Seien $f, g \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ analytische Funktionen, welche im Punkt $a \in U$ dieselbe Ordnung k haben. Dann gilt

$$\lim_{z \longrightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}.$$

Aufgabe 4. Sei $f \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine ganze, injektive Funktion. Zeige, dass sie von der Form $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ ist. Betrachte hierzu die Singularität der Funktion $g(z) = f(\frac{1}{z})$ bei $z = 0$.

⋆ **Aufgabe 5.**

(i) Sei p ein Polynom von Grad n und $f \colon U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Welche Art von isolierter Singularität hat $p \circ f$ in a?

(ii) Sei nun g eine ganze Funktion, die kein Polynom ist. Welche Singularität hat dann $g \circ f$?

Abgabe dienstags in der Übungsstunde oder bis 15:00 in den Fächern im HG J 68.