Lösung: Serie 1

1. a) (0, 1, 1) ist die eindeutige Lösung.

b) Subtraktion der Gleichungen ergibt das System $x_3 = -1$, $x_1 + x_2 = 1$. Daher ist die Lösungsmenge

$$\{(t, 1-t, -1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

c) Durch elementäre Zeilenumformungen erhalten wir die Systeme (in Matrixform)

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Im zweiten System sind die ersten zwei Gleichungen widersprüchlich.
Das erste System hat die eindeutige Lösung $(0, 3, 1)$.

2. Es ergibt sich sofort, dass $d = 0$. Die Koeffizienten a, b, c erfüllen

$$\begin{aligned} -a + b - c &= 7 \\ a + b + c &= -5 \\ 8a + 4b + 2c &= -5. \end{aligned}$$

Das Polynom lautet $p(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 2x^2 - 13x)$.

3. Wir multiplizieren die i-te Gleichung mit 2 und addieren sie auf die $(i-1)$-te Zeile, für $i = n-1,\ n-2,\ \ldots 2$. Wir erhalten das äquivalente System

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= 2x_n \\ x_{n-2} &= 4x_n \\ &\vdots \\ x_1 &= 2^{n-1}x_n. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung lautet nun $(-2^n + 1)x_n = 1$, und daher ist die eindeutige Lösung

$$\frac{1}{-2^n + 1}\left(2^{n-1}, 2^{n-2}, \ldots 1\right).$$