Lösung: Serie 2

1.a)
$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 \quad &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}$$

2.a) Induktionsanfang. $(1+1)^1 = 2 = \frac{2^2}{2!}$.
Nehmen wir an, die Behauptung gilt für ein bestimmtes n. (IV)
Es folgt

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+2)!}, \end{aligned}$$

also die Behauptung gilt für $n+1$.
Nach dem Induktionsprinzip ist die Behauptung wahr für alle natürliche Zahlen.

b) Induktionsanfang. Wir fangen mit $n = 0$ an: $11 \mid 3^4 + 7 = 88$.
Nehmen wir an, $11 \mid (3^{3n+4} + 7^{2n+1})$.

$$3^{3(n+1)+4} + 7^{2(n+1)+1} = 27 \cdot 3^{3n+4} + 49 \cdot 7^{2n+1} = 27(3^{3n+4} + 7^{2n+1}) + 22 \cdot 7^{2n+1}.$$

Da beiden Summanden durch 11 teilbar sind, ist $3^{3(n+1)+4} + 7^{2(n+1)+1}$ auch durch 11 teilbar.
Nach dem Induktionsprinzip ist die Aussage wahr für alle natürliche Zahlen (und 0).

3.a) Induktionsanfang. Wir setzen $n = 1$ und $n = 2$ in die Formel ein.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 = F_1,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \right) &= \frac{1}{4\sqrt{5}} \left((1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})\right) \left((1+\sqrt{5}) + (1-\sqrt{5})\right) \\ &= 1 = F_2. \end{aligned}$$

Angenommen, die Formel gilt für n und $n+1$. (IV)

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$
$$\overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).$$

In der letzten Linie haben wir benutzt $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.
Nach dem Induktionsprinzip gilt die Formel für alle natürliche Zahlen.
Hinweis. Man kann auch die Linearität und Homogenität der Gleichung $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ verwenden, um die Rechnung zu verkürzen.

b) Induktionsanfang. $2^1 - 1 = 1 = x_1$, und $2^2 - 1 = 3 = x_2$.
Nehmen wir an, dass $x_n = 2^n - 1$ und $x_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. (IV). Dann gilt es

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n \overset{\text{(IV)}}{=} 2^n(6-2) - 3 + 2 = 2^{n+2} - 1,$$

was zu beweisen war.

c) Die Folge $x_n = 1$ erfüllt nicht die Anfangsbedingungen, und ist daher keine Lösung für (b). Die Eindeutigkeit der Lösung in (b) folgt gerade aus den Anfangsbedinugnen.
(*Nebenbemerkung.* In der Terminologie der Differenzengleichungen sind z.B. $x_n = 1$ und $x_n = 2^n$ *allgemeine* Lösungen, und $x_n = 2^n - 1$ die *partikuläre* Lösung für (b)).

4.a) i) $z_1 := \dfrac{1}{1+2i} = \dfrac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{1-2i}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$, also Re $(z_1) = \dfrac{1}{5}$ und Im $(z_1) = -\dfrac{2}{5}$.

ii) $z_2 := \overline{\dfrac{5+3i}{1-i}} = \dfrac{(5-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{8+2i}{2} = 4+i$, also Re $(z_2) = 4$ und Im $(z_2) = 1$.

iii) $z_3 := 5e^{\frac{\pi}{6}i} = 5(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}i$, also Re $(z_3) = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ und Im $(z_3) = \dfrac{5}{2}$.

b) Der Hauptwert des Arguments von z_1 ist $\frac{\pi}{4}$, sein Betrag $\sqrt{2}$, also $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
$z_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{i\phi}$, wobei $\phi = \arctan(\frac{1}{2})$.

$$z_1 \cdot z_2 = (1+i)\left(1+\frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i,$$

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}e^{i\phi} = \frac{\sqrt{10}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\phi\right)}.$$

Bei der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen werden also ihre Argumente addiert und ihre Beträge multipliziert.

5. a) $\overline{a}^3 = \overline{(a^3)} = \overline{2+11i} = 2-11i.$

b) $a+\bar{a}$ ist für jedes a eine reelle Zahl. Weiterhin,

$$x^3 = (a+\bar{a})^3 = a^3 + \bar{a}^3 + 3a\bar{a}(a+\bar{a}).$$

Wir setzen ein $a\bar{a} = |a|^2 = \left(|a^3|^2\right)^{\frac{1}{3}} = (4+121)^{\frac{1}{3}} = 5.$

$$x^3 = 4 + 15(a+\bar{a}) = 4 + 15x,$$

was zu beweisen war.

c) Zuerst lösen wir die Zweite Gleichung. Sie hat eine reelle Nullstelle, da nicht-reelle Nullstellen gekoppelt erscheinen, also wir raten eine Lösung $x_0 = 4$. Das ergibt die Faktorisierung

$$(x-4)(x^2+4x+1).$$

Die restliche Lösungen sind $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$. (*Hinweis.* Prüfen Sie die Lösung nach!)
Nach der Teilaufgabe b) erfüllt $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ die Gleichung ii), also setzen wir $z = 2 + ci$ ein.

$$(2+ci)^3 = 8 - 6c^2 + (12c - c^3)i = 2 + 11i.$$

Die entsprechende Lösung ist $z_0 = 2 + i$.
Die andere zwei Lösungen sind erhalten durch Rotation, $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} z_0$ und $z_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} z_0$, d.h.

$$z_{1,2} = (2+i)\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right).$$