Lösung: Serie 3

1. **Lösung 1**: Zuerst zahlen wir alle k-Tupel mit paarweise verschiedenen Elementen, die sich aus der n-elementigen Ausgangsmenge zusammenstellen lassen. Es gibt n Möglichkeiten der Wahl des ersten Tupel-Elements, $n-1$ Möglichkeiten für das zweite Element, nach dessen Wahl nur noch $n-2$ für das dritte usw. bis hin zu $n-k+1$ Wahlmöglichkeiten für das k-teTupel-Element. Die Anzahl aller so zusammengestellten k-Tupel ist also $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+2)\cdot(n-k+1)$. Nun sind aber genau je $k!$ der gezählten k-Tupel Permutationen voneinander, also jede k-elementige Teilmenge ist $k!$ Mal eingezahlt. Nach Division ergibt sich also die gesuchte Anzahl $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$.

   Lösung 2 (induktive Formel): In der Vorlesung wurde mit der kombinatorischen Definition bewiesen, dass $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Man kann diese Formel als Definition des Binomialkoeffizienten verwenden, mit Anfangswerten $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.

   Die Behauptung $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$ kann dann durch Induktion über k bewiesen werden.

2.a) Die Gleichung lässt sich als $z^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\pi}$ darstellen, also die Lösungen sind

$$z_k = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{6}+\frac{ki\pi}{3}}, \quad k = 0\ 1, \ldots 6.$$

In Standardform lauten die Lösungen

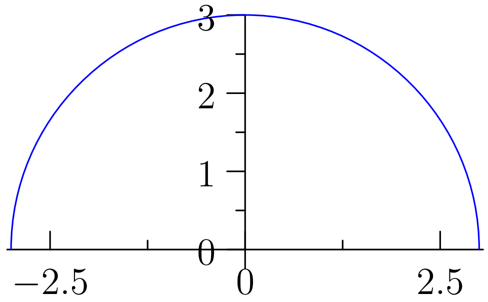
$$z_{0,\,3} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$
$$z_{1,\,4} = \pm\sqrt{2}i$$
$$z_{2,\,5} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right).$$

b) Wir formen die Gleichung zu $z^4 = 2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{4}}$ um. Die Lösungen sind

$$z_k = 2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i\pi}{16}+\frac{ki\pi}{2}} = 2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i\pi}{16}} i^k, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, 3.$$

3.a) Die Elemente mit Betrag 3 liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 3.
Die Elemente mit $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ liegen auf der oberen Halbebene.

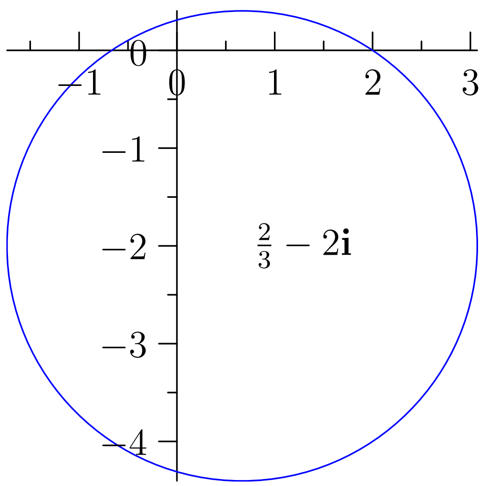
Beachte, dass die Randpunkte -3 und 3 Teil der Menge sind.



b) Gesucht sind alle komplexen Zahlen, die von $-2+2\mathbf{i}$ genau doppelt so weit weg sind wie von $-\mathbf{i}$.
Wir schreiben $z = x + \mathbf{i}y$ und rechnen

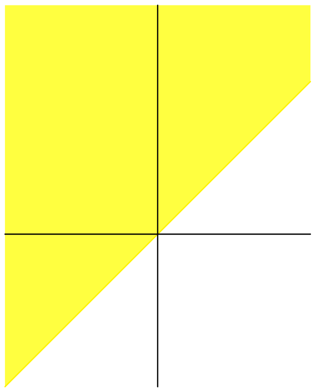
$$
\begin{aligned}
& \frac{|x+\mathbf{i}y+2-2\mathbf{i}|}{|x+\mathbf{i}y+\mathbf{i}|} = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & |x+\mathbf{i}y+2-2\mathbf{i}|^2 = 4|x+\mathbf{i}y+\mathbf{i}|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (x+2)^2+(y-2)^2 = 4x^2+4(y+1)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 3x^2-4x+3y^2+12y-4=0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2-\frac{4}{3}x+y^2+4y-\frac{4}{3}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+(y+2)^2-4-\frac{4}{3}=0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(x-\frac{2}{3}\right)^2+(y+2)^2=\frac{52}{9}.
\end{aligned}
$$

Im zweitletzten Schritt haben wir dabei quadratisch ergänzt.
Das Ergebnis ist ein Kreis mit Mittelpunkt $\frac{2}{3}-2\mathbf{i}$ und Radius $\frac{2\sqrt{13}}{3}$. Er wird **Kreis des Apollonius** genannt.

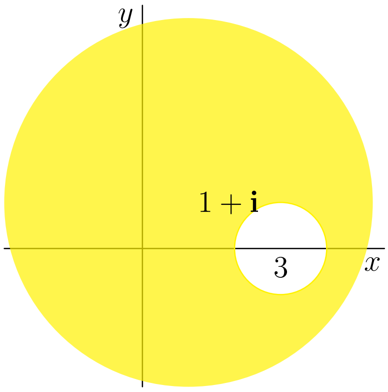


c) Die Gleichung $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)$ beschreibt die Punkte auf der ersten Winkelhalbierenden.

Die gesuchte Menge ist die Vereinigung dieser Geraden und des Bereiches oberhalb davon.

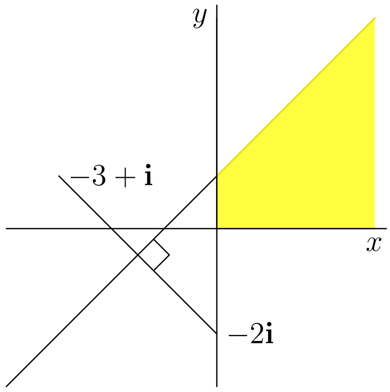


d) Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-3| \geq 1\}$ besteht aus allen Zahlen ausserhalb der Kreisscheibe mit Mittelpunkt 3 und Radius 1.
Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z-1-\mathbf{i}| < 4\}$ ist die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $1+\mathbf{i}$ und Radius 4.
Gesucht ist die Schnittmenge. Beachte, dass der Rand des kleinen Kreises schon, jener des grossen jedoch nicht Teil der Menge ist.



e) Gesucht sind die Punkte im ersten Quadranten, die näher bei $-2\mathbf{i}$ sind als bei $-3+\mathbf{i}$.
Die komplexen Zahlen, die von $-2\mathbf{i}$ gleich weit entfernt sind wie von $-3+\mathbf{i}$, sind genau jene auf der Mittelsenkrechten der Strecke von $-2\mathbf{i}$ nach $-3+\mathbf{i}$. Diese Mittelsenkrechte teilt die komplexe Ebene in zwei Halbebenen. Die komplexen Zahlen, die zu $-2\mathbf{i}$ näher sind als zu $-3+\mathbf{i}$, ist die Halbebene, die $-2\mathbf{i}$ enthält.

Dabei sind die Koordinatenachsen zur gesuchten Menge disjunkt. Der Teil der Mittelsenkrechten der Strecke von $-2\mathbf{i}$ nach $-3+\mathbf{i}$, der im ersten Quadranten liegt, ist jedoch Teil der gesuchten Menge.



4.a) Eine Gleichung der Abbildungen beweist man am meistens elementweise. Für jedes $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\chi_{A\cap B}(n) = 1 &\Leftrightarrow n \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow n \in A \text{ und } n \in B \\ &\Leftrightarrow \chi_A(n) = 1 \text{ und } \chi_B(n) = 1 \\ &\Leftrightarrow \chi_A(n)\chi_B(n) = 1.\end{aligned}$$

Da die charakteristische Abbildungen nur Werte 0 und 1 erreichen, es folgt

$$\chi_{A\cap B}(n) = 0 \Leftrightarrow \chi_A(n)\chi_B(n) = 0,$$

und die erste Gleichung ist bewiesen.
Für die Gleichung $\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$ haben wir drei Fälle:

- Wenn $n \notin A$ und $n \notin B$, sind die beiden Seiten 0.
- Wenn $n \in A \setminus B$, d.h. $\chi_A(n) = 1$ und $\chi_B(n) = 0$, sind die beiden Seiten 1. Analog für $n \in B \setminus A$.
- Wenn $n \in A \cap B$, sind die beiden Seiten 2.

b) Nach der Teilaufgabe a) gilt die Identitäet $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ genau dann, wenn $\chi_{A\cap B} \equiv 0$, d.h. $A \cap B = \emptyset$.

5.a) '$\Rightarrow$': Für alle Mengen X und Y gilt $X \cap Y \subset Y$. Also $X = X \cap Y$ impliziert $X \subset Y$.
Längere Lösung: Sei $X = X \cap Y$ und $x \in X$ beliebig. Dann ist $x \in X \cap Y$, und insbesondere $x \in Y$.
'$\Leftarrow$': Die Inklusion $X \cap Y \subset X$ gilt unabhängig von X und Y.
Umgekehrt, da $X \subset Y$, jedes Element $x \in X$ gehört zu $X \cap Y$, d.h. $X \subset X \cap Y$.

b) $x \in Z \setminus (X \cup Y) \Leftrightarrow x \in Z$ und $x \notin X \cup Y$

$\Leftrightarrow x \in Z$ und $x \notin X$ und $x \notin Y$

$\Leftrightarrow x \in Z \setminus X$ und $x \in Z \setminus Y$

$\Leftrightarrow x \in (Z \setminus X) \cap (Z \setminus Y)$.

c) Wir bezeichnen $S = \{1, 2, \ldots N\}$. Weiterhin, für jedes $j \in \mathbb{N}$, sei $V_j = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ ist *nicht* teilbar durch $j\}$.
Dann ist die gesuchte Menge

$$S \cap V_2 \cap V_3 \cap V_5 \cap V_7 \cap V_{11}.$$

6.a) $\mathrm{V} = (\mathrm{X}_1 \cap \overline{X}_2) \cup (X_2 \cap \overline{X}_2)$.

b) $\mathrm{V} = (\mathrm{X}_1 \cap \overline{X}_2 \cap \overline{X}_3) \cup (X_2 \cap \overline{X}_1 \cap \overline{X}_3) \cup (X_3 \cap \overline{X}_1 \cap \overline{X}_2)$.

c) $V = (X_1 \cap X_2) \cup (X_2 \cap X_3) \cup (X_3 \cap X_1) \setminus (X_1 \cap X_2 \cap X_3)$

$= ((X_1 \cap X_2) \cap \overline{X}_3) \cup ((X_2 \cap X_3) \cap \overline{X}_1) \cup ((X_1 \cap X_3) \cap \overline{X}_2)$.