Musterlösung 4

1.

2. Es wird jeweils nur die eine Behauptung gezeigt, da die Beweise recht ähnlich sind.

a) f und g seien injektiv, dann gilt: $g \circ f$ ist injektiv. Es ist zu zeigen ist, dass aus $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ folgt,dass $x_1 = x_2$.
Aus $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ folgt $f(x_1) = f(x_2)$, da g injektiv ist. Daraus folgt wiederum $x_1 = x_2$, da f injektiv ist.

b) Sei $g \circ f$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv. Zu zeigen ist: jedes beliebige $z \in Z$ wird durch g "getroffen".
Sei $z \in Z$ beliebig. Da $g \circ f$ surjektiv ist, existiert ein $x \in X$ mit $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ und $y := f(x) \in Y$, also ist $g(y) = z$.

3. **a)** Falsch: Betrachte zum Beispiel die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und wähle $A = [-2, -1]$ und $B = [1, 2]$. Dann gilt $A \cap B = \emptyset$ und somit $f(A \cap B) = \emptyset$. Andererseits ist aber $f(A) = f(B) = [1, 4]$, also $f(A) \cap f(B) = [1, 4]$.

b) Wahr: Sei $x \in f(A \cup B)$. Dann existiert ein y in A oder B, sodass $f(y) = x$. Falls $y \in A$, dann ist $x \in f(A)$ und anderenfalls ist $x \in f(B)$. Insbesondere gilt also $x \in f(A) \cup f(B)$. Dies zeigt die Inklusion "$\subset$". Für die Inklusion "$\supset$" sei $x \in f(A) \cup f(B)$. Falls $x \in f(A)$, dann gibt es ein $y \in A$, sodass $f(y) = x$. Anderenfalls gibt es ein $y \in B$ mit $f(y) = x$. In jedem Fall findet man also ein $y \in A \cup B$ mit $f(y) = x$ und somit gilt $x \in f(A \cup B)$.

c) Wahr: Sei $x \in f^{-1}(C \cap D)$. Das bedeutet, dass es ein $y \in C \cap D$ gibt, sodass $f(x) = y$ gilt. Da y im Durchschnitt von C und D ist, liegt x sowohl im Urbild von C als auch in jenem von D. Dies zeigt die Inklusion "$\subset$". Für die Inklusion "$\supset$" sei $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Das heisst, es gibt ein $y_1 \in C$ mit $f(x) = y_1$ und es gibt ein $y_2 \in D$ mit $f(x) = y_2$. Das bedeutet aber natürlich, dass $y_1 = y_2$ und insbesondere liegt dieses Element in $C \cap D$.

d) Wahr: Sei $x \in f^{-1}(C \cup D)$. Dann existiert ein y in C oder D, sodass $f(x) = y$. Falls $y \in C$, dann ist $x \in f^{-1}(C)$ und anderenfalls ist $x \in f^{-1}(D)$. Insbesondere gilt also $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Dies zeigt die Inklusion "$\subset$". Für die Inklusion "$\supset$" sei $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Falls $x \in f^{-1}(C)$, dann gibt es ein $y \in C$, sodass $f(x) = y$. Anderenfalls gibt es ein $y \in D$ mit $f(x) = y$. In jedem Fall findet man also ein $y \in C \cup D$ mit $f(x) = y$ und somit gilt $x \in f^{-1}(C \cup D)$.

e) Falls f injektiv ist, dann ist auch a) wahr: Sei zuerst $x \in f(A \cap B)$. Dann existiert ein y in $A \cap B$, sodass $f(y) = x$. Da y in A und in B ist, liegt $x = f(y)$ in $f(A)$ und in $f(B)$, also in $f(A) \cap f(B)$. Dies zeigt die Inklusion "$\subset$". Für die Inklusion "$\supset$" sei $x \in f(A) \cap f(B)$. Es gibt also ein $y_1 \in A$ mit $f(y_1) = x$ und ein $y_2 \in B$ mit $f(y_2) = x$. Da f aber injektiv ist, gilt $y_1 = y_2$ und dieses Element liegt in $A \cap B$. Somit ist aber $x \in f(A \cap B)$.

4. **a)** Sei $f(x_1) = f(x_2)$ für einige $x_1, x_2 \in Y$. Dann gilt nach der Definition $x_1 = x_2$, was zu beweisen war.

b) Bild$(f) = Y$. f ist surjektiv genau dann, wenn ihres Bild die ganze Menge X umfasst. Daher ist f surjektiv wenn und nur wenn $Y = X$.

c) Für die Gleichung $f^{-1}(B) = B \cap Y$, wir beweisen die zwei Inklusionen. '$\subset$': $f^{-1}(B) \subset$ Y, da Y der Definitionsbereich der f ist. Weiterhin, $x \in f^{-1}(B)$ impliziert $f(x) = x \in B$, also es gilt $f^{-1}(B) \subset B$. Die zwei Inklusionen ergeben $f^{-1}(B) \subset B \cap Y$.
'$\supset$': Sei $x \in B \cap Y$. Dann ist $f(x) = x$ wohldefiniert und $f(x)$ liegt in B. Es folgt, dass $B \cap Y \subset f^{-1}(B)$.

5. **a)** Sei $x \in \mathbb{C}$. Gesucht ist ein $z \in \mathbb{C}$, sodass $z(1 - z) = x$. Wir berechnen z als die Lösung der quadratischen Gleichung $z^2 - z + x = 0$.

b) $f(0) = f(1) = 0$, also f ist nicht injektiv.
Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Ein $w \in \mathbb{C}$ gehört zur Menge $f^{-1}(f(z))$ genau dann, wenn $f(w) \in \{f(z)\}$, d.h.

$$\begin{aligned} f(w) &= f(z) && \Leftrightarrow \\ w(1-w) &= z(1-z) && \Leftrightarrow \\ (w-z)(w+z) - w + z &= 0 && \Leftrightarrow \\ (w-z)(w+z-1) &= 0 && \Leftrightarrow \\ w = z \text{ oder } w &= 1 - z. \end{aligned}$$

Es folgt, $f^{-1}(f(z)) = \{z, 1 - z\}$.

Siehe nächstes Blatt!

c)

$$\begin{aligned} z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} = f(\overline{z}) \\ &\overset{(c)}{\Leftrightarrow} \overline{z} = z \text{ oder } \overline{z} = 1 - z \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ oder } \Re(z) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow z \in A \text{ oder } z \in B, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

d) Aus c) folgt, $f^{-1}([0, +\infty)) \subset f^{-1}(\mathbb{R}) = A \cup B$. Wir finden zuerst die reelle Elemente der Menge $f^{-1}([0, +\infty))$. Vom Graph oder durch Fallunterscheidung ergibt sich, dass für $z \in \mathbb{R}$,

$$f(z) = z(1 - z) \geq 0 \Leftrightarrow z \in [0,\, 1$$

Weiterhin berechnen wir $f^{-1}([0, +\infty)) \cap B$.

$$f\left(\frac{1}{2} + it\right) = \frac{1}{4} + t^2 \geq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Die zwei Fälle ergeben

$$f^{-1}\left([0, +\infty)\right) = [0,\, 1] \cup \left\{\frac{1}{2} + it \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$