Lösung 5

1. **a)** Die Abbildung ist nicht injektiv, da zum Beispiel $f(3,1) = 3 = f(3,2)$.

b) Die Abbildung ist surjektiv: für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, $n = f(n,\,1)$, also n liegt im Bild von f.

c) $X = \mathbb{N} \times \{1\}$ erfüllt die Bedingung. Surjektivität der Einschränkung $f\big|_X$ ist bewiesen in b).
Injektivität: angenommen, $f(m_1,\,1) = f(m_2,\,1)$. Da $f(n,\,1) = n$ für alle n, es folgt $m_1 = m_2$.

2. **a)** Das erste Element von A hat 8 Plätze zur Auswahl, das zweite 7, das dritte Element 6, das vierte noch 5 und das fünfte hat 4 Plätze zur Auswahl, also gibt es $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$ injektive Abbildungen von A nach B.

b) Die Anzahl der Abbildungen einer n-elementigen Menge in eine Menge mit k Elementen ist k^n.

Wenn wir alle 5^8 Abbildungen von B nach A rechnen, so haben wir einige gezählt, die nicht surjektiv sind, nämlich alle diejenigen, die nur auf vier Elemente von A abbilden.

Da es $\binom{5}{4}$ Möglichkeiten gibt, 4 Elemente aus 5 auszuwählen und es 4^8 Abbildungen von B in eine 4-elementige Menge gibt, müssen $\binom{5}{4} \cdot 4^8$ Abbildungen abgezählt werden.

Zählt man alle Abbildungen auf 4 Elemente von A, so wird jede Abbildung auf nur 3 Elemente von A doppelt gezählt: Nenne a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 die Elemente von A. Sind $A_1 := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ und $A_2 := \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ zwei 4-elementige Teilmengen, so sind die Abbildungen nach der 3-elementigen Teilmenge $\{a_2, a_3, a_4\}$ sowohl Abbildungen nach A_1 als auch A_2, sie werden also doppelt gezählt.

Daher muss zu $5^8 - \binom{5}{4} \cdot 4^8$ noch die Anzahl Abbildungen auf alle möglichen drei-elementigen Mengen, also $\binom{5}{3} \cdot 3^8$, gezählt werden.

Ähnlich geht es mit den Abbildungen auf 2 Elemente: die wurden bei den Abb. auf 4 Elemente doppelt abgezählt und bei den Abbildungen auf drei Elemente dreifach dazugezählt. Daher muss einmal die Anzahl Abbildungen auf 2-elementige Menge, also $\binom{5}{2} \cdot 2^8$, abgezählt werden.

Bitte wenden!

Analog für die Abbildunge auf ein Element, es bleibt, einmal die Anzahl auf 1-elementige Mengen, also $\binom{5}{1} \cdot 1^8$, dazuzuzählen.

Insgesamt ist die Anzahl surjektiver Abbildungen $B \to A$:

$$5^8 - \binom{5}{4} \cdot 4^8 + \binom{5}{3} \cdot 3^8 - \binom{5}{2} \cdot 2^8 + \binom{5}{1} \cdot 1^8 = 126\,000.$$

Eine andere Möglichkeit ist, rekursiv zu rechnen: Sei $Surj(n, k)$ die Menge der surjektiven Abbildungen einer n-elementigen Menge in eine k-elementige Menge. Nun kann $Surj(n, k)$ zerlegt werden in diejenigen Abb. von $n-1$ Elementen aus, die immer noch surjektiv sind, also $Surj(n-1, k)$, und die Abb. von $n-1$ Elementen aus, die nicht mehr surjektiv sind. Diese sind aber surjektiv auf $k-1$ Elemente, also $Surj(n-1, k-1)$.

$$\begin{aligned} Surj(n,k) &= k \cdot (Surj(n-1,k) + Surj(n-1,k-1)) \\ &= k^2 \cdot (Surj(n-2,k) + Surj(n-2,k-1)) \\ &\quad +k(k-1) \cdot (Surj(n-2,k-1) + Surj(n-2,k-2)) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Hinweis: die Anzahl surjektiver Abbildungen von n nach k Elementen ist $k! \cdot S_{n,k}$, wobei $S_{n,k}$ die Stirlingschen Zahlen zweiter Ordnung sind. Diese Zahlen finden sich in Buechern zur Kombinatorik, z.B. M. Aigner, Kombinatorik I, Springer 1975, p. 141 und Tabelle p. 157 (ergibt $5! \cdot 1050$, also $126\,000$).

3. Betrachten wir eine beliebige Person A – sie hat entweder drei Bekannte oder drei Unbekannte (laut dem Schubfachprinzip). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) hat A drei Bekannte B_1, B_2 und B_3. Wenn es eine 'Bekanntschaft' B_iB_j gibt, haben wir eine Dreiergruppe der Bekannten AB_iB_j. Andernfalls kennen B_1, B_2 und B_3 einander nicht, und wir haben eine Dreiergruppe der Unbekannten.

Die Behauptung gilt nicht unbedingt, wenn nur fünf Personen anwesend sind, z.B. die Bekanntschaften können genau AB, BC, CD, DE, EA sein.

4. **a)** Jeder Abbildung $\chi : X \longrightarrow \{0, 1\}$ entspricht die *eindeutige* Menge

$$A = \{x \in X : \chi(x) = 1\},$$

die erfüllt $\chi_A = \chi$. Daher ist die Abbildung bijektiv.

b) Sei $n = |X|$, und wir zählen $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ auf. Es gibt $|Y|$ Wahlmöglichkeiten für das Bild $f(x_1) \in Y$, $|Y|$ Möglichkeiten für $f(x_2)$ usw., also die Anzahl solchen Abbildungen f beträgt $|Y|^n$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Teilaufgabe b) impliziert $S = 2^{|X|}$. Da S in Bijektion zur $\mathcal{P}(X)$ steht, gilt es $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

5. a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 12 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 2+36 & -5+6-30 \\ -1-4 & -6+48 & 15-3-40 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 38 & -29 \\ -5 & 42 & -28 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2$$

c)

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3xy + xz + 4yz$$

6. Induktionsanfang. $A^1 = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix}$.

Angenommen, $A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$ für ein bestimmtes n. Es folgt

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} + F_n \\ F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix},$$

also die Behauptung gilt für $n+1$.

Nach dem Induktionsprinzip ist die Behauptung wahr für alle natürliche Zahlen.

7. Wir zeigen, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Induktionsanfang. $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bitte wenden!

Wir nehmen an, die Behauptung gilt für ein bestimmtes n. (IV)
Dann ist

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \overset{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

was zu beweisen war.

Für die Matrix B, sodass $A \cdot B = B \cdot A = I$, setzen wir in (1) $n = -1$ ein, und erhalten

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Obwohl wir die Matrix A^{-1}, noch nicht definitert haben, ist die Intuition $B =$ 'A^{-1}' auch nützlich.

Alternativ kann man $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ in $A \cdot B = I$ einsetzen und die Koeffizienten ausrechnen.