Lösung 6

1.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} j = \sum_{i=1}^{n}(i + (i+1) + \cdots + n)$$
$$= (1+2+3+\cdots+n) + (2+3+\cdots+n) + \cdots + (n-1+n) + n$$

a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i!} = n.$

b) $\sum_{i=1}^{n}(a_i b_1 + a_i b_2 + \cdots + a_i b_m) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = 0.$

2. Sei P die Anzahl der Paare der Schüler die an einem Tag zusammen aufräumen. Wir drücken P in zwei verschiedenen Weisen aus.
Einerseits, da jedes Paar einmal zusammen gearbeitet hat, ist $P = \binom{15}{2} = \frac{15\cdot 14}{2}$.
Andererseits, sei n die Anzahl der Tage. Jeden Tag haben drei Paaren aufgeräumt, also $P = 3n$.
Es folgt, $3n = \frac{15\cdot 14}{2} = 105$, also $n = 35$.

Bemerkung. Wir behandeln im Wesentlichen eine doppelte Summe. Sei n die Anzahl der Tage. Wir bezeichnen die Paare der Schüler mit $p_1,\ p_2, \ldots p_{105}$, und definieren die Matrix $A \in M_{105,n}$ als

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn das Paar } p_i \text{ am Tag } j \text{ aufgeräumt hat,} \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Das heisst, die Reihen entsprechen den Paaren und die Spalten entsprechen den Tagen. Nun berechnen wir $P = \sum_{i=1}^{105}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ (die Anzahl der Einsen).
Da jedes Paar genau einmal zusammen gearbeitet hat, enthält jede Reihe genau eine Eins. Summieren uber die Reihen ergibt $P = 105$.
Andererseits enthält jede Spalte drei Einsen, da jeden Tag drei Paare aufgeräumt haben. Summieren uber die Spalten ergibt $P = 3n$. Daher ist $n = 35$.

3. Wir verwenden das (Rechts- bzw. Links-) distributivgesetz:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) y \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} y x_i = y\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) b_j && \text{(Rechtsdistributivität)}\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) && \text{(Linksdistributivität)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j && \text{(gleiche Begründung).}
\end{aligned}
$$

Alternativ kann man die Identitäten durch Induktion beweisen, oder die Summen entwickeln.

4. Wir zeigen, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a^m & b\sum_{i=0}^{m-1}(a^{m-1-i}c^i) \\ 0 & c^m \end{pmatrix} . \tag{1}
$$

Induktionsanfang. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Angenommen, (1) gilt für ein bestimmtes m (IV). Dann ist

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{m+1} \overset{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^m & b\sum_{i=0}^{m-1}(a^{m-1-i}c^i) \\ 0 & c^m \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} a^{m+1} & ab\sum_{i=0}^{m-1}(a^{m-1-i}c^i) + bc^m \\ 0 & c^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{m+1} & b\sum_{i=0}^{m}(a^{m-i}c^i) \\ 0 & c^{m+1} \end{pmatrix},
$$

also die Behauptung gilt für alle $m \in \mathbb{N}$.

Für $a \neq c$ setzen wir $\sum_{i=0}^{m-1} a^{m-1-i}c^i = a^{m-1} + a^{m-2}c + \cdots + c^{m-1} = \frac{a^m - c^m}{a-c}$ (bewiesen durch Ausmultiplizieren) ein.

Wenn $a = c$, die Gleichung (1) impliziert $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a^m & mba^{m-1} \\ 0 & a^m \end{pmatrix}$.

5. **a)** Für $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.

b) Die Matrix $A = (1, 1, \ldots, 1)$ erfüllt $f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

Siehe nächstes Blatt!

6. Sei $A = (a_{ij})_{ij}$. Dann gilt es für alle Indizes i, j, $(D(t)A)_{ij} = ta_{ij} = (tA)_{ij} = (AD(t))_{ij}$. Das heisst, $D(t)A = tA = AD(t)$.

7. Sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3 + t_4A_4 = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_3 & t_4 \end{pmatrix}$$

gilt genau dann, wenn $t_1 = a$, $t_2 = b$, $t_3 = c$ und $t_4 = d$.
Also, die gesuchte Darstellung ist für diese Wahl der Matrizen $A_1, \ldots A_4$ eindeutig.

8. **a)**

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\mathrm{I}_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = 0.$$

b) Teilaufgabe a) ergibt $A(A-(a+d)\mathrm{I}_2) = (A-(a+d)\mathrm{I}_2)A = -(ad-bc)\mathrm{I}_2$.
Falls $ad - bc \neq 0$, die Matrix

$$B = \frac{1}{ad-bc}((a+d)\mathrm{I}_2 - A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

erfüllt $A \cdot B = B \cdot A = \mathrm{I}_2$.

9. Seien $z_j = a_j + ib_j$ für $j = 1, 2$ beliebig.

a) Es gilt

$$g(z_1) + g(z_2) = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & -b_1-b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix} = g(z_1+z_2), \text{ und}$$

$$g(z_1)\cdot g(z_2) = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1a_2 \\ a_1b_2 + b_1a_2 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} = g(a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2)) = g(z_1z_2).$$

b) $g(z_1) = g(z_2)$ impliziert $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$ (durch Vergleichung der Komponenten), also $z_1 = z_2$. Daher ist g injektiv.
Die Abbildung g ist nicht surjektiv, da z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Bild}(f)$. Eigentlich,

$$\mathrm{Bild}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$