Lösung 7

1. **a)** Wir führen den Beweis induktiv. $1 \cdot x = x$ ist der Induktionsanfang. Wir nehmen an, dass gilt $(n-1)x = (\underbrace{x + \ldots + x}_{n-1})$. Dann folgt

$$n \cdot x = (n-1+1)x = (n-1)x + x = (\underbrace{x + \ldots + x}_{n-1}) + x = (\underbrace{x + \ldots + x}_{n}).$$

b) Wir verwenden $x + (-x) = (-x) + x = 0$, das in den Vorlesungen bewiesen wurde. Wir zeigen zuerst '$\Rightarrow$'

$$\begin{aligned} x + y &= z && / + (-x) \\ x + y + (-x) &= z + (-x) && \text{(da '+' eine wohldefinierte Abbildung ist)} \\ y + x + (-x) &= z + (-x) && \text{(Kommutativität)} \\ y &= z - x. \end{aligned}$$

Umgekehrt,

$$\begin{aligned} y &= z - x && / + x \\ y + x &= z + (-x) + x \\ x + y &= z. \end{aligned}$$

c) Wenn $t = 0$ oder $x = 0_V$, gilt $t \cdot x = 0_V$.
Umgekehrt, sei $t \cdot x = 0_V$. Wenn $t = 0$, die Forderung ist wahr. Angenommen, $t \neq 0$, d.h. t hat eine Multiplikative Inverse $\frac{1}{t}$. Multiplizieren mit $\frac{1}{t}$ ergibt $0_V = \frac{1}{t}(tx) = \left(\frac{1}{t} \cdot t\right) x = x$, also $x = 0_V$.

Man beachte, dass bei allen Umformungen nur Voraussetzungen und die Vektorraumaxiome verwendet werden.

2. **a)** Seien $v_i, u_i, w_i \in V_i$ für $i = 1, 2$, und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Wir lassen die Indizes in 0_{V_1}, $+_{V_1}$ usw. weg. Jedes Axiom folgt aus den entsprechenden Axiomen in V_1 und V_2 und den Definitionen der $+$ und $\cdot$ in V, bezeichnet mit $\stackrel{d}{=}$.

Bitte wenden!

1.

$$(0,\,0) + (v_1, v_2) \stackrel{d}{=} (0 + v_1, 0 + v_2) = (v_1, v_2)$$
$$= (v_1 + 0, v_2 + 0) \stackrel{d}{=} (v_1, v_2) + (0, 0).$$

2. $(v_1, v_2) + (u_1, u_2) \stackrel{d}{=} (v_1 + u_1, v_2 + u_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \stackrel{d}{=} (u_1, u_2) + (v_1, v_2).$

3.

$$((v_1, v_2) + (u_1, u_2)) + (w_1, w_2) \stackrel{d}{=} (v_1 + u_1, v_2 + u_2) + (w_1, w_2)$$
$$\stackrel{d}{=} ((v_1 + u_1) + w_1, (v_2 + u_2) + w_2) = (v_1 + (u_1 + w_1), v_2 + (u_2 + w_2))$$
$$\stackrel{d}{=} (v_1, v_2) + (u_1 + w_1, u_2 + w_2) \stackrel{d}{=} (v_1, v_2) + ((u_1, u_2) + (w_1, w_2)).$$

4.

$$\lambda((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) \stackrel{d}{=} \lambda(v_1 + w_1, v_2 + w_2) \stackrel{d}{=} (\lambda(v_1 + w_1), \lambda(v_2 + w_2))$$
$$= (\lambda v_1 + \lambda w_2, \lambda v_2 + \lambda w_2) \stackrel{d}{=} (\lambda v_1, \lambda v_2) + (\lambda w_1, \lambda w_2) \stackrel{d}{=} \lambda(v_1, v_2) + \lambda(w_1, w_2).$$

5.

$$(\lambda + \mu)(v_1, v_2) \stackrel{d}{=} ((\lambda + \mu)v_1, (\lambda + \mu)v_2) = (\lambda v_1 + \mu v_1, \lambda v_2 + \mu v_2)$$
$$\stackrel{d}{=} (\lambda v_1, \lambda v_2) + (\mu v_1, \mu v_2) \stackrel{d}{=} \lambda(v_1, v_2) + \mu(v_1, v_2).$$

6.

$$(\lambda\mu)(v_1, v_2) \stackrel{d}{=} ((\lambda\mu)v_1, (\lambda\mu)v_2) = (\lambda(\mu v_1), \lambda(\mu v_2))$$
$$\stackrel{d}{=} \lambda(\mu v_1, \mu v_2) \stackrel{d}{=} \lambda(\mu(v_1, v_2)).$$

7.

$$0 \cdot (v_1, v_2) \stackrel{d}{=} (0 \cdot v_1, 0 \cdot v_2) = (0, 0) \text{ und}$$
$$1 \cdot (v_1, v_2) \stackrel{d}{=} (1 \cdot v_1, 1 \cdot v_2) = (v_1, v_2).$$

b) Wir finden eine lineare Abbildung $g : V_1 \to V$ mit $\mathrm{Bild}(g) = W_1$: sei $g(v) = (v, 0)$ für $v \in V_1$. Die Abbildung g ist linear, weil $g(\lambda v + \mu w) = (\lambda v + \mu w, 0) = \lambda g(v) + \mu g(w)$ für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. In der Tat, $\mathrm{Bild}(g) = \{(v, 0) : v \in V_1\} = W_1$. Daher ist W_1 ein Unterraum von V.
Weiterhin, g ist injektiv, da $g(v) = g(w)$ impliziert $(v, 0) = (w, 0)$, also $v = w$. Wir können g als eine Bijektion $g : V_1 \to W_1$ betrachten, also ein Isomorphismus $V_1 \to W_1$.

c) Sei $f : V_1 \to V_2$ linear, und $(x, y), (z, t) \in W$, d.h. $y = f(x)$ und $t = f(z)$. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$\lambda(x, f(x)) + \mu(z, f(z)) = (\lambda x + \mu z, f(\lambda x + \mu z),$$

also der Vektor $\lambda(x, f(x)) + \mu(z, f(z))$ liegt in W.

Siehe nächstes Blatt!

3. Wir testen, ob für zwei beliebige Vektoren v, w aus diesen Teilmengen und für beliebige $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ der Vektor $\mu v + \lambda w$ auch in der Teilmenge liegt.

a) Seien $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ Elemente aus W_0. Wegen $(\mu x_1 + \lambda y_1) + (\mu x_2 + \lambda y_2) + (\mu x_3 + \lambda y_3) = \mu(x_1 + x_2 + x_3) + \lambda(y_1 + y_2 + y_3) = 0$ ist $\mu x + \lambda y$ wieder in W_0. Deshalb ist auch W_0 ein Unterraum der $\mathbb{R}^3$.

b) Dies ist kein Vektorraum, denn für $(1, 1, 5)$ liegt zum Beispiel $2 \cdot (1, 1, 5) = (2, 2, 10)$ nicht mehr in angegebener Menge: $2 + 2 + 10 = 14 \neq 7$.

c) Dies ist kein Vektorraum, da per Definition jeder Vektorraum mindestens ein Element, nämlich $\{0\}$, enthalten muss.

d) Ist ein reeller Unterraum: Sei $v = (0, x, 2x, 3x)$ und $w = (0, y, 2y, 3y)$. Dann ist

$$\mu v + \lambda w = (0, \mu x + \lambda y, 2\mu x + 2\lambda y, 3\mu x + 3\lambda y) = (0, z, 2z, 3z)$$

mit $z = \mu x + \lambda y$, also liegt $\mu v + \lambda w$ auch in der Teilmenge.

e) Ist kein reeller Unterraum: Betrachten Sie z.B. den Vektor $v = (1, 1, 1)$, der in der Teilmenge liegt. Der Vektor $2v = (2, 2, 2)$ liegt nicht in der Teilmenge, denn es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $(2, 2, 2) = (x^3, x^2, x)$.

f) Ist ein reeller Unterraum: Sei $v = (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1)$ und $w = (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2)$. Dann ist

$$\mu v + \lambda w = (\mu x_1 + \lambda x_2, \mu x_1 + \lambda x_2 + \mu y_1 + \lambda y_2, \mu x_1 + \lambda x_2 - \mu y_1 - \lambda y_2).$$

Dieser Vektor liegt auch in der Teilmenge (mit $x := \mu x_1 + \lambda x_2$, $y := \mu y_1 + \lambda y_2$).

g) Ist kein reeller Unterraum: Die Vektoren $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ sind enthalten, deren Summe $(1, 1, 0)$ aber nicht.

4. Es bezeichne f_a die Abbildung aus der Aufgabe **a)**, f_b diejenige von **b)**, usw.

a) Die Abbildung f_a ist linear, denn

$$f_a(\lambda(x, y)) = \left(3\lambda x + 2\lambda y, -\lambda x - \frac{2}{3}\lambda y\right) = \lambda\left(3x + 2y, -x - \frac{2}{3}y\right) = \lambda f_a(x, y)$$

und

$$\begin{aligned} f_a(x, y) + f_a(u, v) &= \left(3x + 2y, -x - \frac{2}{3}y\right) + \left(3u + 2v, -u - \frac{2}{3}v\right) \\ &= \left(3(x + u) + 2(y + v), -(x + u) - \frac{2}{3}(y + v)\right) \\ &= f_a(x + u, y + v) = f_a((x, y) + (u, v)). \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Da im Bild von f_a die zweite Koordinate genau $-\frac{1}{3}$ mal der ersten Koordinate ist, ist das Bild von f_a gegeben durch $\left\{\left(u, -\frac{u}{3}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in \mathbb{R}\right\}$, da sich offensichtlich jedes $u \in \mathbb{R}$ als $3x + 2y$ schreiben lässt. Also ist f_a nicht surjektiv. Die Funktion ist auch nicht injektiv, da der Kern $\left\{\left(v, -\frac{3}{2}v\right) \in \mathbb{R}^2 \mid v \in \mathbb{R}\right\}$ mehr als ein Element enthält.

b) Es lässt sich leicht nachprüfen, dass f_b linear ist. $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}$ da z.B. $x = f_b(x, 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist f_b surjektiv. Der Kern, das heisst die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ für die $x + y = 0$ gilt, ist die Gerade $\{(t, -t), t \in \mathbb{R}\}$. Mehrere Punkte werden auf Null abgebildet, also ist f_b nicht injektiv.

c) Die Abbildung f_c ist nicht linear, falls $b \neq 0$, denn $f_c(0) = b \neq 0$. Falls $b = 0$, so ist f_c linear.
Falls $a = 0$ ist, dann ist f_c konstant und deshalb nicht surjektiv. Das Bild von f_c ist in diesem Fall genau $\{b\}$. Falls $a \neq 0$, ist f_c bijektiv.

d) f_d ist linear, denn $f_d(\lambda u + \mu v) = (\lambda u + \mu v)(1) = \lambda \cdot u(1) + \mu \cdot v(1) = \lambda f_d(u) + \mu f_d(v)$.
Sie ist surjektiv, weil z.B. die Konstante $u(x) \equiv a$ erfüllt $f_d(u) = a$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$. $\mathrm{Kern}\, f$ enthält ein nicht-null Element $u(x) = x - 1$, somit ist f nicht injektiv.

e) f_e ist linear, denn es gilt

$$\lambda f_e(x + iy) = \lambda\overline{(x + iy)} = \lambda(x - iy) = \overline{\lambda(x + iy)} = f_e(\lambda(x + iy)),$$

wobei wir beim dritten Gleichheitszeichen brauchen, dass $\lambda \in \mathbb{R}$. Auch $f(x) + f(y) = f(x + y)$ lässt sich leicht nachprüfen. Die Abbildung ist bijektiv und hat somit Kern $\{0\}$ und Bild $\mathbb{C}$.

f) f_f ist nicht linear, denn $i f_f(i) = i\bar{i} = -i^2 = 1 \neq -1 = f_f(i^2)$.

5. **a)** Die Überprüfung ist analog zum Beweis für $\mathbb{R}^n$.

b) Seien $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$, und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}(\lambda x + \mu y)_{n+1} &= \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1} = \lambda(x_n + x_{n-1}) + \mu(y_n + y_{n-1}) \\ &= (\lambda x_n + \mu y_n) + (\lambda x_{n-1} + \mu y_{n-1}),\end{aligned}$$

also $\lambda x + \mu y$ gehört zu V.

c) Wir definieren f durch

$$f(x_1, x_2, \dots) = (x_3 - x_2 - x_1,\, x_4 - x_3 - x_2,\, x_5 - x_4 - x_3, \dots).$$