Lösung 10

1. Nach dem Rangsatz (Theorem 2.8.4 in der Skripte) gilt $\dim V = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f)$.

a) Da $\dim \mathrm{Bild}(f) \leq m < n$, wir haben $\dim \mathrm{Kern}(f) = n - \dim \mathrm{Bild}(f) > n - n = 0$. Es folgt, dass $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$, also f ist nicht injektiv.

b) $\dim \mathrm{Bild}(f) = n - \dim \mathrm{Kern}(f) \leq n < m$. Es folgt, dass $\mathrm{Bild}(f) \neq W$, d.h. f ist nicht surjektiv.

c) Sei $B = (v_1, \ldots v_n)$ und $B_2 = (w_1, \ldots, w_m)$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \quad \text{für } j = 1, \ldots n. \tag{1}$$

Das heisst, die j-te Spalte der Matrix A sind die Koeffizienten der Darstellung von $f(v_j)$ in Termen von B_2.
Sei die j-te Spalte von A genau gleich Null. Dann ist $f(v_j) = 0$, und somit ist f nicht injektiv.

d) Sei die i-te Zeile von $A = (a_{ij})$ gleich Null. Wir behaupten, dass $w_i \notin \mathrm{Bild}(f)$ ist.
Beweis. Sei $w_i = f(v) = f(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j)$ für einige $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. Aber dann ist $w_i = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j)$.
Argument 1. Wir vergleichen die beiden Seiten der Gleichung: Der Spaltenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei die Eins in der i-ten Zeile steht, ist eine Linearkombination der Spalten von A. Das ist ein Widerspruch, weil in der i-ten Zeile von A alle Einträge Null sind.
Argument 2. Wir setzen die Definitionsgleichung (1) ein.

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \right) w_k.$$

Der Koeffizient von w_i auf der rechten Seite ist $\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0$, Widerspruch.

Bitte wenden!

e) Seien B_1 und B_2 die kanonische Basen für $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^3$. Es gilt $A = \mathrm{Mat}(f_A; B_1, B_2)$. Nach der Teilaufgabe a) ist f_A nicht injektiv, also es existiert ein $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0_4\}$, sodass $f_A(x) = 0$. Dann ist $Ax = f_A(x) = 0$, was zu beweisen war.

2. **a)** Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $B, C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

$$f(\lambda B + \mu C) = A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC = \lambda f(B) + \mu f(C),$$

also f ist linear.
In der Aufgabe 8 der 6. Serie haben wir gezeigt, dass A invertierbar ist und

$$A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sei C in $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Wir suchen ein $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, sodass $f(B) = C$ d.h. $AB = C$. $B = A^{-1}C$ erfüllt diese Bedingung, also $f^{-1}(C) = A^{-1}C$.

b) Sei $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
f(b_1) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} && = 2b_1 + b_2, \\
f(b_2) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} && = 3b_1 - 2b_2, \\
f(b_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && = 2b_3 + b_4, \\
f(b_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} && = 3b_3 - 2b_4.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. **a)** Sei $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ und $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$. $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig und $|\mathcal{B}| = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, also $\mathcal{B}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

$$f(b_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} = -c_1 - c_2 + 9c_3 \quad \text{und} \quad f(b_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3c_1 - 3c_2 - 3c_3.$$

Daher ist $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Seien $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2)$ und $\mathcal{C}_1 := (w_1, w_2, w_3)$ geordnete Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. $A = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1)$ gilt genau dann, wenn $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Also wir setzen

$$\mathcal{B}_1 := \mathcal{B} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_1 = (f(b_1), f(b_2), w_3)\,.$$

Hier ist w_3 ein beliebiger Vektor, der mit $f(b_1)$ und $f(b_2)$ linear unabhängig ist, zum Beispiel $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. **a)** V_n ist ein Unterraum: Seien P_1 und P_2 zwei Polynome vom $\mathrm{Grad}(P_i) \leq n$. Dann hat jede lineare Kombination der P_1 und P_2 auch Grad höchstens n.
V_n ist endlichdimensional: Aus der Definition des V_n ist B_n ein Erzeugendensystem für V_n.

b) In der Vorlesung haben wir bewiesen, dass B_n linear unabhängig ist. Da die Menge B_n auch V_n erzeugt, ist sie eine Basis. Es folgt, dass $\dim V_n = n + 1$.

c) Wohldefiniertheit: Wir müssen zeigen, dass $f(P) \in V_{n-1}$ für $P \in V_n$ (siehe f) für konkrete Beispiele). Sei $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Dann ist

$$f(P)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i)((x+1)^i - x^i).$$

Der n-te Term lautet $a_n(x^n + nx^{n-1} + \cdots + 1 - x^n)$, und das Monom x^n hebt auf. Also $\mathrm{Grad}(f(P)) \leq n - 1$, und in der Tat $f(P) \in V_{n-1}$.
Linearität:

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x+1) - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) = \\ &= \lambda_1 P_1(x+1) + \lambda_2 P_2(x+1) - \lambda_1 P_1(x) - \lambda_2 P_2(x) \\ &= \lambda_1 (P_1(x+1) - P_1(x)) + \lambda_2 (P_2(x+1) - P_2(x)) \\ &= \lambda_1 f(P_1)(x) + \lambda_2 f(P_2)(x). \end{aligned}$$

d) Sei $P \in \mathrm{Kern}(f)$, d.h. $P(x) = P(x+1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere, $P(0) = P(2) = P(2) = P(3) \ldots$ Wir subtrahieren $P(0)$, und schliessen, dass das Polynom $Q(x) = P(x) - P(0)$ erfüllt $0 = Q(0) = Q(1) = Q(2)$ usw. Q hat unendlich viele Nullstellen, also $Q = 0$. Somit ist $P(x) = P(0)$ für alle x, und folglich $\mathrm{Kern}(f) \subset V_0 = \{P \in V : P(x) = a_0, a_0 \in \mathbb{R}\}$.
Da alle konstante Polynome P die Bedingung $P(x+1) - P(x) \equiv 0$ erfüllen, gilt es $\mathrm{Kern}(f) = V_0$.

e) Nach dem Rangsatz, $\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim(V_n) - \dim \mathrm{Kern}(f) = n + 1 - 1 = n = \dim V_{n-1}$. Daher ist $\mathrm{Bild}(f) = V_{n-1}$, also f ist surjektiv.

Bitte wenden!

f) Wir bezeichnen $P_i = x^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ und berechnen

$$\begin{aligned}
f(P_0)(x) &= 1 - 1 = 0 \\
f(P_1)(x) &= (x+1) - x = 1 \\
f(P_2)(x) &= (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 \\
f(P_3)(x) &= (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \\
f(P_4)(x) &= (x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\operatorname{Mat}(f; B_4, B_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$