# Lösung 12

**1. a)** Aus dem gegebenen homogenen Gleichungssystem erhalten wir sukzessiv äquivalente Systeme durch anwenden des Gauss'schen Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & -2 & -11 & 0 \\ 4 & 12 & -6 & -8 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -14 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das letzte System ist auf Zeilenstufenform und wir können die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems direkt ablesen:

$$\left\{ t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

**b)** Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems genau die Summe der allgemeinen Lösung des homogenen Gleichungssystems und einer partikulären Lösung ist. Eine partikuläre Lösung ist $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Folglich ist die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Bitte wenden!**

**2.** **a)** Durch Nachrechnen (zum Beispiel mit dem Gauss Algorithmus) sehen wir, dass die Vektoren $v_1$, $v_2$ und $v_4$ linear unabhängig sind. Der Vektor $v_3 = v_1 + v_4$ hängt linear von $v_1$ und $v_4$ ab. Demnach ist $W$ ein dreidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

Das Gleichungssystem entspricht einer Matrix $N \in \mathrm{Mat}_{m,4}(\mathbb{R})$, sodass $\mathrm{Ker}(f_N) = W$. Nach dem Rangsatz gilt es $4 = \dim \mathrm{Ker}(f_N) + \dim \mathrm{Im}(f_N)$, also wir können $m = \dim \mathrm{Im}(f_N) = 1$ setzen. Sei $N := \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{pmatrix}$.
*Bemerkung*. Geometrisch, der Vektor $\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{pmatrix}$, steht senkrecht auf $v_1$, $v_2$, $v_4$.

Wir ösen das Gleichungssystem $\big(Nv_i = 0\big)$, für $i = 1, 2, 4$ (da $v_3 \in \langle\{v_1, v_2, v_4\}\rangle$). Dieses Gleichungssystem ist äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} n_1 & + & 2n_2 & + & n_3 & + & 2n_4 & = & 0 \\ & & & - & n_3 & + & n_4 & = & 0 \\ & & 2n_2 & + & n_3 & + & n_4 & = & 0. \end{array}$$

Duch sukzessives Auflösen dieser 3 Gleichungen, erhalten wir

$$N = \begin{pmatrix} n_1 & n_1 & -n_1 & -n_1 \end{pmatrix}$$

für ein beliebiges $n_1 \in \mathbb{R}$. Da die Länge des Normalenvektors keine Rolle spielt, dürfen wir $n_1 = 1$ wählen und bekommen $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Wir prüfen nach, dass tatsächlich $W = \mathrm{Ker}(f_N)$. Wir haben erfordert, dass $W \subset \mathrm{Ker}(f_N)$. Umgekehrt, da $\dim \mathrm{Im}(f_N) = 1$, gilt es $\dim \mathrm{Ker}(f_N) \leq 3 = \dim W$, also $\mathrm{Ker}(f_N) \subset W$, was zu beweisen war.

Das entsprechende Gleichungssystem ist $f_N(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^4$, d.h.

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

**b)** Wegen der Beziehung $v_3 = v_1 + v_4$ sind die Vektoren $v_1$, $v_3$ und $v_4$ linear abhängig, wobei jeweils zwei davon linear unabhängig sind. Der Vektor $v_2$ ist linear unabhängig von allen anderen. Daher muss $v_2$ sicher Teil jeder Basis (die ausschliesslich die Vektoren $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ enthalten darf) sein. Somit ergeben sich die drei Möglichkeiten:

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_4\}, \quad \mathcal{B}_3 = \{v_2, v_3, v_4\}.$$

**3.** Mit Hilfe des Gauss Algorithmus' bekommen wir als Lösungsmenge für dieses Gleichungssystem den eindimensionalen Vektorraum $V := \{(-\frac{3}{2}z, \frac{5}{2}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Eine Basis davon ist beispielsweise der Vektor $(-3, 5, 2)$.

**Siehe nächstes Blatt!**

**4.** **a)** Mit dem Gauss Algorithmus sehen wir, dass die vier Vektoren linear unabhängig sind. Somit ist eine mögliche Basis $(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Damit wir (wie in b) gefordert) besser die geeigneten Standardbasisvektoren finden, bietet es sich an, diese Basis etwas umzuschreiben, siehe dazu Teilaufgabe b).

**b)** Mit $v_1 - v_2 - v_4 = (0, 0 - 3, 0, 0)$ finden wir einen Vektor, der parallel zu $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ ist; somit liegt $e_3$ in einer Basis von $V$. Analog sehen wir mit $2v_1 - v_3$, dass $e_2$ in dieser Basis liegt. Mit dem Gauss Algorithmus sehen wir, dass wir mit den Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4$ die Standardvektoren $e_1, e_4$ und $e_5$ nicht erzeugen können. Mit etwas Rechnen finden wir somit eine Basis von $V$ bestehend aus den Vektoren $\tilde{v}_1 = (1, 0, 0, 1, 1)$, $\tilde{v}_2 = e_2$, $\tilde{v}_3 = e_3$ und $\tilde{v}_4 = (0, 0, 0, 1, -1)$. Somit können wir (um es zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ zu ergänzen) die Vektoren $e_1$, $e_4$ oder $e_5$ dazunehmen.

**5.**

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Durch Auflösen des Gleichungssystems $Ax = 0$ erhällt man $(1, -2, 1)^\top$ als Basis von $\mathrm{Ker} f_A$. Die Spaltenvektoren von $A$ spannen $\mathrm{Im}\, f_A$ auf, und da $A$ zwei linear unabhängige Spaltenvektoren besitzt gilt $\mathrm{Im}\, A = \mathbb{R}^2$, also ist die Standartbasis eine Basis von $\mathrm{Im}\, A$.
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f_B : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$. Durch Auflösen des Gleichungssystems $Bx = 0$ erhällt man $(1, 0, 0, -1, -1)^\top, (0, 1, -1, -1, -1)^\top$ als Basis von $\mathrm{Ker} f_B$. Die ersten beiden Spaltenvektoren lassen sich durch die letzten drei ausdrücken, und diese drei sind offensichtlich linear unabhängig. Also bilden die letzten drei Spaltenvektoren eine Basis von $\mathrm{Im}\, f_B$.
- $C = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $f_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

  Sei zunächst $(a, b)^\top \neq 0$, $(c, d)^\top \neq 0$. Jedes $(x, y) \in \mathrm{Ker} f_C$ erfüllt

  $$0 = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} acx + ady \\ bcx + bdy \end{pmatrix} = (cx + dy) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

  Dies gilt genau dann wenn $cx + dy = 0 \Leftrightarrow (x, y)^\top \in \langle\{(d, -c)^\top)\}\rangle$ und somit $\mathrm{Ker} f_C = \langle\{(d, -c)^\top\}\rangle$.

  Da $xc + dy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ jeden Wert in $\mathbb{R}$ annehmen kann folgt aus der obigen Gleichung $\mathrm{Im}\, f_C = \langle\{(a, b)^\top\}\rangle$.

  Falls $(a, b)^\top = 0$ oder $(c, d)^\top = 0$, so ist $f_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Nullabbildung und wir erhalten $\mathrm{Ker} f_C = \mathbb{R}^2$ und $\mathrm{Im}\, f_C = \{0\}$.

**Bitte wenden!**

**6.** Eine Basis des Kerns ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und eine Basis des Bildes ist gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**7.** Durch Anwenden des Gaußschen Eliminationsverfahrens erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha\,. \end{pmatrix}$$

Eine obere Dreiecksmatrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Diagonaleinträge ungleich null sind. Es folgt, dass die Matrix der Aufgabe genau dann invertierbar ist, wenn für $\alpha$ gilt:

$$\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) \neq 0.$$

Dies ist äquivalent zu $\alpha \notin \{0, 1\}$.

**8.**

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 35/11 & -16/11 & 13/11 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 10/11 & -3/11 & 10/11 & -1 \\ -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{pmatrix}.$$