Serie 2

1. Geben Sie ein Beispiel eines nicht-trivialen linearen Gleichungssystems (d.h. keine Gleichungen der Form $0 = a$) mit

a) 2 Gleichungen, 3 Unbekannten, mehr als einer Lösung,

b) 3 Gleichungen, 4 Unbekannten, keiner Lösung,

c) 4 Gleichungen, 2 Unbekannten, genau einer Lösung.

2. Verwenden Sie Induktion, um die folgenden Behauptungen für jede natürliche Zahl n zu beweisen.

a)
$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Hinweis. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

b) $3^{3n+4} + 7^{2n+1}$ ist ein Vielfach von 11.

3. a) Die Fibonacci Zahlen sind gegeben durch $F_1 = F_2 = 1$, und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen sie die explizite Formel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

b) Sei die Folge x_n definiert durch $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, und $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass
$$x_n = 2^n - 1.$$

c) Prüfen Sie nach, dass $x_n = 1$ die induktive Bedingung $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ erfüllt. Erklären Sie, warum die Folge in Teilaufgabe (b) eindeutig definiert ist.

4. a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden Ausdrücke

i) $1/(1+2i)$,

ii) $(\overline{5+3i})/(1-i)$,

iii) $5e^{\pi i/6}$.

b) Stellen Sie $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 + i/2$ in Polarkoordinaten dar. Multiplizieren Sie z_1 und z_2 miteinander und zwar einmal normal und einmal in Polarform. Illustrieren Sie graphisch was passiert.

5. a) Sei a eine komplexe Zahl so dass $a^3 = 2 + 11i$. Zeigen Sie, dass $\bar{a}^3 = 2 - 11i$.

b) Sei $x = a + \bar{a}$. Zeigen Sie, dass $x^3 = 15x + 4$ und dass x reell ist.

c) Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit komplexen Unbekannten z und x.

i) $z^3 = 2 + 11i$

ii) $x^3 - 15x - 4 = 0$.