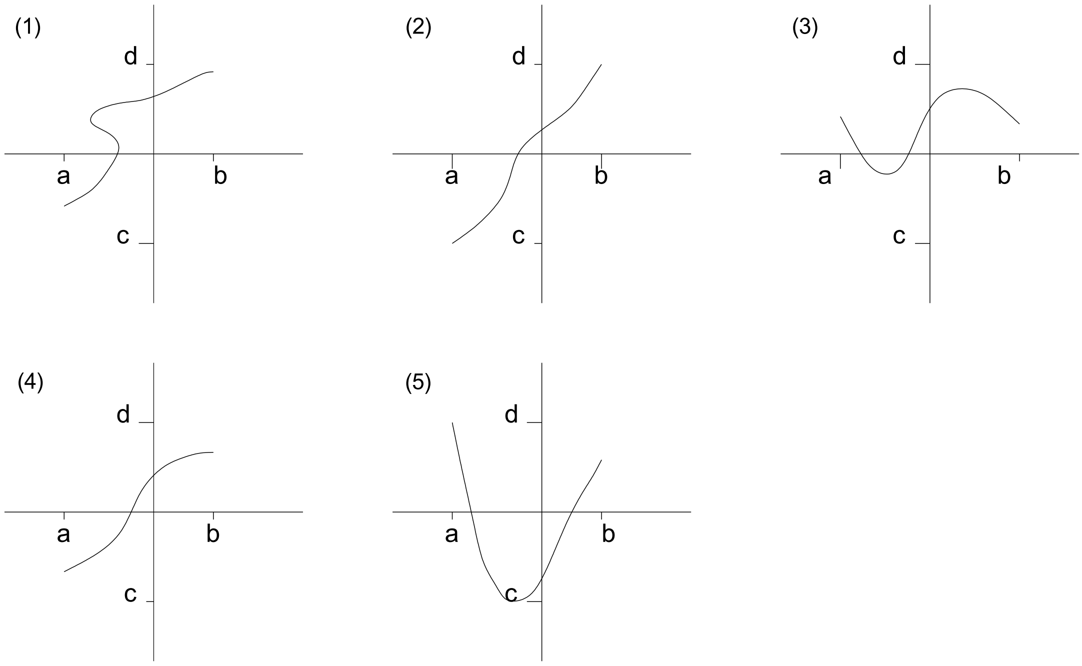
# Serie 4

**1.** Welche der folgenden Bilder sind Graphen einer injektiven bzw. surjektiven Funktion $[a, b] \to [c, d]$?




- ☐ (1) ist injektiv
- ☐ (2) ist injektiv
- ☐ (3) ist injektiv
- ☐ (4) ist injektiv
- ☐ (5) ist injektiv
- ☐ (1) ist surjektiv
- ☐ (2) ist surjektiv
- ☐ (3) ist surjektiv
- ☐ (4) ist surjektiv
- ☐ (5) ist surjektiv

**2.** Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen und $g \circ f : X \to Z$ die Komposition von $f$ und $g$. Dann gilt

a) Sind $f$ und $g$ injektiv (surjektiv), so ist auch $g \circ f$ injektiv (surjektiv)

b) Ist $g \circ f$ injektiv (surjektiv), so ist auch $f$ injektiv ($g$ surjektiv)

**3.** Sei $X$ eine Menge und $Y \subset X$ eine Teilmenge von $X$. Wir definieren die Abbildung $f : Y \to X$ sodass $f(x) = x$ für $x \in Y$ ("Inklusionsabbildung").

a) Zeigen Sie, dass $f$ injektiv ist.

b) Für welche Teilmengen $Y$ ist $f$ surjektiv?

c) Zeigen Sie, dass
$$f^{-1}(B) = B \cap Y \quad \text{und} \quad f(A) = A,$$
für alle Teilmengen $A \subset Y$ und $B \subset X$.

**4.** Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und seien $A, B \subset X$ und $C, D \subset Y$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

d) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

e) Durch Hinzufügen welcher Bedingungen (injektiv oder surjektiv) kann man die falschen Aussagen reparieren?

**5.** Sei $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ die Abbildung sodass $f(z) = z(1-z)$ für $z \in \mathbf{C}$.

a) Zeigen Sie, dass $f$ surjektiv ist.

b) Zeigen Sie, das $f$ nicht injektiv ist; berechnen Sie die Menge $f^{-1}(f(z))$ für $z \in \mathbf{C}$.

c) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(\mathbf{R}) = A \cup B$, wo
$$A = \mathbf{R}, \qquad B = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid z = \frac{1}{2} + it, \text{ wobei } t \in \mathbf{R} \right\}.$$
Finden Sie eine Abbildung $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ sodass $B = g(\mathbf{R})$.

d) Berechnen Sie $f^{-1}([0, +\infty])$.