Serie 5

1. Wir haben das Binomialkoeffizient als eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ f(n,\, k) &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

definiert.

a) Ist die Abbildung f injektiv? Ist sie surjektiv?

b) Bestimmen Sie eine Teilmenge $X \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sodass die Einschränkung $f\big|_X : X \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv ist.

2. Es seien A, B Mengen mit $\mathrm{Card}(A) = 5$ und $\mathrm{Card}(B) = 8$. Bestimmen Sie die Anzahl der injektiven Abbildungen $f : A \to B$, und die Anzahl der surjektiven Abbildungen $g : B \to A$.

3. Auf einer Party sind sechs Gäste anwesend. Beweisen Sie, dass es drei Personen gibt, die alle einander entweder kennen oder nicht kennen. Dabei wird vorausgesetzt, dass wenn eine Person eine andere kennt, so ist dies auch in umgekehrter Richtung der Fall.
Hinweis. Betrachten Sie eine beliebige Person A – sie hat entweder drei Bekannte oder drei Unbekannte. Fokusieren Sie sich auf die Bekanntschaften zwischen diesen drei Personen, und benutzen Sie das Schubfachprinzip.

Gilt die Behauptung, wenn nur fünf Personen anwesend sind?

4. Sei X eine endliche Menge, und $\mathrm{P}(X)$ die Potenzmenge von X.

a) Es bezeichne S die Menge der Abbildungen $X \longrightarrow \{0,\, 1\}$. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &\longrightarrow S \\ A &\longmapsto \chi_A \end{aligned}$$

bijektiv ist.
Für die Definition der charakteristischen Abbildung, siehe Serie 3.

Bitte wenden!

b) Für endliche Mengen X und Y, die Anzahl der Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ beträgt $|Y|^{|X|}$.

c) Verwenden Sie Teilaufgaben a) und b), um zu beweisen, dass $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

5. Berechnen Sie die Matrixprodukte:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 12 & -10 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

6. Es sei (F_n) die Fibonaccifolge, die durch

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

definiert ist.

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$, gilt

$$A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1}. \end{pmatrix}$$

7. Es sei A die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $A^n = A \cdot A \cdots A$ (n-mal). Gibt es eine Matrix B sodass $B \cdot A = \mathrm{I}_3 = A \cdot B$? Wenn Ja, bestimmen Sie B.

Abgabe: Freitag, den 23. Oktober 2015 vor 12:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.