Serie 6

1. Entwickeln Sie die Summe $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} j$ in eine Form ohne Summenzeichen (d.h. mit Pünktchen).

Übersetzen Sie die folgenden Gleichungen in eine pünktchenfreie Schreibweise.

a) $\frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \dots \frac{a_n}{n!} = n,$

b) $(a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_1b_m) + (a_2b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_2b_m) + \cdots + (a_nb_1 + a_nb_2 + \cdots + a_nb_m) = 0.$

2. 15 Schüler nehmen an einem Sommercamp teil. Jeden Tag müssen drei Schüler das Klassenzimmer aufräumen. Nach dem Kurs wird festgestellt, dass jedes Paar der Schüler genau einmal zusammen aufgeräumt hat. Wie lange hat das Camp gedauert?

3. Zeigen Sie, dass für alle $m,\ n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1,\ a_2, \dots,\ a_n,\ b_1,\ b_2, \dots,\ b_m \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j.$$

4. Verwenden Sie Induktion um zu zeigen: Falls $a \neq c$ ist, so gilt für jede $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a^m & b\,\frac{a^m - c^m}{a-c} \\ 0 & c^m \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie eine ähnliche Formel für den Fall $a = c$ her.

5. **a)** Sei $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$. Berechnen Sie $f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$.

b) Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1,\ x_2, \dots x_n) &\longmapsto x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \end{aligned}$$

Finden Sie die entsprechende Matrix A sodass $f = f_A$.

Bitte wenden!

6. Es sei $n \geq 1$. Für $t \in \mathbb{K}$, wir definieren

$$D(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & \dots \\ 0 & t & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & 0 & t \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$$

(die *Diagonalmatrix*).

Zeigen Sie, dass für alle Matrizen $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, es gilt $D(t)A = AD(t) = tA$.

7. Finden Sie 4 Matrizen $A_1, \dots A_4 \in M_{2,2}(\mathbb{K})$ sodass für jede Matrix $A \in M_{2,2}(\mathbb{K})$, es gibt Elemente $t_1, \dots, t_4 \in \mathbb{K}$ mit

$$A = t_1 A_1 + \cdots + t_4 A_4.$$

Ist der Vektor $(t_1, \dots, t_4)$ eindeutig?

8. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{K}).$$

a) Berechnen Sie

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\mathrm{I}_2.$$

(wo $A^2 = A \cdot A$).

b) Falls $ad - bc \neq 0$, finden Sie eine Matrix $B \in M_{2,2}(\mathbb{K})$ sodass $A \cdot B = B \cdot A = \mathrm{I}_2$.

9. Es sei $g : \mathbb{C} \to M_{2,2}(\mathbb{K})$ die Abbildung

$$g(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{für } z = a + ib \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass $g(z_1 + z_2) = g(z_1) + g(z_2)$, und $g(z_1 z_2) = g(z_1) \cdot g(z_2)$ für alle z_1 und z_2 in $\mathbb{C}$.

b) Zeigen Sei, dass g injektiv ist. Ist g bijektiv?

Abgabe: Freitag, den 30. Oktober 2015 vor 12:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.