Serie 7

1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \cdot x = \underbrace{x + \ldots + x}_{n}$.

b) Wir haben $-x$ als $(-1) \cdot x$ definiert, und $z - x := z + (-1) \cdot x$. Zeigen Sie, dass $z = x + y$ äquivalent zu $y = z - x$ ist.

c) Zeigen Sie, dass $t \cdot x = 0_V$ genau dann, wenn entweder $t = 0$ oder $x = 0_V$.

2. Es seien V_1 und V_2 zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, und V die Menge $V_1 \times V_2$.

a) Zeigen Sie, dass V mit dem Nullvektor $0_V = (0_{V_1}, 0_{V_2})$ und Addition

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 +_{V_1} w_1, v_2 +_{V_2} w_2)$$

und Skalarmultiplikation

$$t \cdot (v_1, v_2) = (t \cdot_{V_1} v_1, t \cdot_{V_2} v_2)$$

ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$W_1 = \{(x, y) \in V \mid y = 0_{V_2}\}$$

ein Unterraum von V ist ; finden Sie ein Isomorphismus $V_1 \to W_1$.

c) Es sei $f : V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$W = \{(x, y) \in V \mid y = f(x)\} \subset V_1 \times V_2$$

ein Unterraum von V ist.

3. Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume des angegebenen Vektorraums?

a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$,

b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 7\} \subset \mathbb{R}^3$,

Bitte wenden!

c) die leere Menge $\emptyset \subset \mathbb{R}^2$,

d) $\{(0, x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$,

e) $\{(x^3, x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,

f) $\{(x, x+y, x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,

g) $\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

4. Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen linear sind. Falls ja, untersuchen Sie sie auf Injektivität und Surjektivität und bestimmen Sie ihr Kern und Bild.
Alle Vektorräume ausser f) sind über $\mathbb{R}$.

a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \left(3x + 2y, -x - \frac{2}{3}y\right),$
b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y,$
c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b,$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$,
d) $V \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto u(1),$ wobei $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$,
e) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z},$
f) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z},$ wobei $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

5. Es sei L der Vektorraum der reellen Folgen $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$.

a) Sei
$$V = \{(x_1, x_2, \ldots) \in L \mid x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \text{ für } n \in \mathbb{N}\}.$$
Prüfen Sie nach, dass V ein Unterraum von L ist.

b) Geben Sie eine lineare Abbildung $f : L \longrightarrow L$ an, sodass $\mathrm{Ker}(f) = V$.

Abgabe: Freitag, den 6. November 2015 vor 12:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.