Serie 8

1. Sei die *Spur* der Matrix A definiert als die Summe der diagonalen Einträge, d.h.

$$\mathrm{Tr} \,:\, \begin{cases} M_{n,n}(\mathbb{K}) & \to \mathbb{K} \\ A & \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass Tr eine lineare Abbildung ist.

b) Beweisen Sie $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ für A, B in $M_{n,n}(\mathbb{K})$.
Hinweis. Versuchen Sie zuerst den Fall $n = 3$.

2. Sei f die Abbildung

$$f : M_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$$
$$A \longmapsto f_A.$$

Beweisen Sie, dass f linear ist. Berechnen Sie $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$. Ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ endlichdimensional?

3. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und W_1, W_2 Unterräume von V. Beweisen Sie, dass $W_1 \cup W_2$ ein Unterraum ist, genau dann, wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$.
Hinweis. Angenommen, $W_1 \nsubseteq W_2$ und $W_2 \nsubseteq W_1$. Für $v_1 \in W_1 \setminus W_2$ und $v_2 \in W_2 \setminus W_1$, betrachten Sie den Vektor $v_1 + v_2$.

4. Für $a_i \in \mathbb{K}$, sei D die *Diagonalmatrix*

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass D invertierbar ist genau dann, wenn $\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0$. Wenn D invertierbar ist, berechnen Sie ihre Inverse.

Bitte wenden!

5. Seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

in $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass $\{A_1, A_2\}$ linear unabhängig ist.

b) Zeigen Sie, das Erzeugnis $\langle\{A_1, A_2\}\rangle$ ist die Teilmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid d = e = 0, \quad b - a = f, \quad 3a = c \right\}.$$

c) Finden Sie eine Matrix $A_3 \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ sodass $\{A_1, A_2, A_3\}$ linear unabhängig ist. Ist $\langle\{A_1, A_2, A_3\}\rangle = M_{2,3}(\mathbb{R})$?

6. Sei W die Teilmenge

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 \mid a + b + c + d = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass W ein Unterraum von $\mathbb{C}^4$ ist.

b) Zeigen Sie, dass W endlichdimensional ist.

c) Sei

$$S = \{(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)\} \subset W.$$

Berechnen Sie $\langle S\rangle$. Ist S linear abhängig?

7. Sei V der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Mengen der geraden (bzw. ungeraden) Funktionen

$$V_1 := \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\}, \qquad V_2 := \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\}$$

Unterräume von V sind. Finden Sie den Unterraum $V_1 \cap V_2$.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $V_1 \cup V_2$ erzeugt V, d.h. $\langle V_1 \cup V_2\rangle = V$.
(Hinweis: Betrachten Sie für $f \in V$ die Abbildung $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.)

c) Finden Sie eine unendliche linear unabhängige Teilmenge von V_1 (bzw. V_2).

8. Finden Sie eine nicht-triviale lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sodass $\mathrm{Kern}(f)$ die Vektoren

$$(1, 2, 3),\ (4, 5, 6),\ (7, 8, 9) \in \mathbb{R}^3$$

enthält.

Abgabe: Freitag, den 13. November 2015 vor 12:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.