Serie 9

1. Sind die folgenden Mengen linear unabhängig?

a) $\{(1,0,0,1),\ (2,3,-3,9),\ (1,3,-4,7),\ (2,0,1,3)\} \subset \mathbb{R}^4$;

b) Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ i & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

in $M_{2,3}(\mathbb{C})$;

c) Die Polynome $\{x^2+1, x^2+x+1, x^2+2\}$;

d) Die Funktionen $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \cos(2x)$, $f_2(x) = (\cos x)^2$ im Raum $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ über $\mathbb{R}$.

2. Seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

a) Zeigen Sie, dass $\{A_1, \ldots, A_4\}$ eine Basis von $M_{2,2}(\mathbb{R})$ ist.
Hinweis. Es genügt zu beweisen, dass A_1, A_2, A_3 und A_4 linear unabhängig sind. Warum?

b) Was ist die Dimension der folgenden Unterraüme: $\langle\{A_1, A_2\}\rangle$, $\langle\{A_1, A_3, A_4\}\rangle$, $\langle\{A_1, A_4\}\rangle$?

3. Bestimmen Sie die Dimension von $\langle\{x^2, x^2+x, x^2+1, x^2+x+1, x^7+x^5\}\rangle$ im Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten.

4. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass B genau dann eine Basis für $\mathbb{R}^2$ ist, wenn $ad - bc \neq 0$.

Bitte wenden!

b) Geben Sie zwei disjunkte Basen B_1 und B_2 für $\mathbb{R}^2$ (d.h. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$)

c) Wählen Sie zufällig a, b, c, d; wird dann B eine Basis sein, oder nicht?

5. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, W ein Unterraum mit Basis S, und $v \in V \setminus S$. Zeigen Sie, dass $S \cup \{v\}$ linear unabhängig ist genau dann, wenn $v \notin W$.

6. Es sei V den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Funktionen $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Für $n \in \mathbb{N}_0$, definieren wir $f_n \in V$ durch

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}$$

Zeigen Sie, dass $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ linear unabhängig ist.

7. Es sei $n \geq 1$ und $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix. Wir nehmen an, dass es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $A^k x_0 \neq 0_n$ und $A^{k+1} x_0 = 0_n$.

Beweisen Sie, dass die Menge

$$\{x_0, Ax_0, \ldots, A^k x_0\} \subset \mathbb{R}^n$$

linear unabhängig ist. Beweisen Sie weiters, dass $k \leq n-1$.

Abgabe: Freitag, den 20. November 2015 vor 12:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.