Serie 10

1. Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichen $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$. Sei B (bzw. B') eine geordnete Basis von V (bzw. W), und $A = \mathrm{Mat}(f; B, B')$.

a) Falls $n > m$, zeigen Sie, dass f *nicht* injektiv ist.

b) Falls $m > n$, zeigen Sie, dass f *nicht* surjektiv ist.

c) Falls A eine Nullspalte hat, zeigen Sie dass f nicht injektiv ist.

d) Falls A eine Nullzeile hat, zeigen Sie dass f nicht surjektiv ist.

e) Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -6 & 7 & 12 \\ 100 & -\pi & e^3 & \sqrt{107} \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, ohne Berechnung, dass es ein $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0_4\}$ gibt, sodass $Ax = 0_3$.

2. Sei $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : V \to V$, $f(B) = AB$, linear ist. Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

b) Sei

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

3. Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung definiert durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y \\ -2x + y \\ 3x + 6y \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

a) Sei $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, und $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Prüfen Sie nach, dass $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis für $\mathbb{R}^2$ ist. Finden Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.

b) Finden Sie Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix A von f gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. *Hinweis*: Versuchen Sie zum Beispiel, die Basis $\mathcal{B}$ zu verwenden.

4. Sei V der Vektorraum von Polynomen mit reellen Koeffizienten:

$$V = \{P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \mid d \geq 0,\ a_i \in \mathbb{R}\}.$$

a) Sei $n \geq 0$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass

$$V_n = \{P \in V \mid P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R}\}$$

ein endlichdimensionaler Unterraum von V ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$B_n = (1, x, \ldots, x^n)$$

eine geordnete Basis von V_n ist. Was ist $\dim(V_n)$?

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : V_n \to V_{n-1}$, wobei $f(P) = P(x+1) - P(x)$, wohldefiniert und linear ist.

d) Berechnen Sie $\mathrm{Ker}(f)$. [Falls $P \in \mathrm{Ker}(f)$, bestimmen Sie die Nullstellen von $Q(x) = P(x) - P(0)$.]

e) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

f) Sei $n = 4$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{Mat}(f; B_5, B_4)$.

Abgabe: Freitag, den 27. November 2015 vor 12:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.