Serie 11

1. Es sei W der Vektorraum über $\mathbb{R}$ von allen Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es sei

$$\mathcal{B} = (\sin, \cos, \sin \cdot \cos, \sin^2, \cos^2)$$

und V das Erzeugnis von $\mathcal{B}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

b) Zeigen Sie, dass $D(f) = f'$ (die Ableitung von f) eine lineare Abbildung $D : V \to V$ definiert.

c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A = \mathrm{Mat}(D; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

d) Berechnen Sie $\mathrm{Ker}(D) \subset V$. Was ist der Rang von D?

e) Finden Sie einen Vektor $x \in \mathbb{R}^5$, $x \neq 0_5$, sodass $Ax = 0$.

2. Es sei W der $\mathbb{R}$-Vektorraum von allen Polynomen $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ wo $d \geq 0$ und $a_i \in \mathbb{R}$.

Es seien

$$P_n(x) = x^n, \qquad Q_n(x) = (x+1)^n,$$

und $V_d = \langle P_0, \ldots, P_d \rangle$ für $d \geq 0$.

a) Zeigen Sie, dass V_d ein Unterraum von W ist, mit $\dim(V_d) = d + 1$, und dass $B_d = (P_0, \ldots, P_d)$ eine geordnete Basis von V_d ist.

b) Zeigen Sie, dass $B'_d = (Q_0, \ldots, Q_d)$ eine geordnete Basis von V_d ist.

c) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen M_{B_2,B'_2}, $\mathrm{M}_{B'_2,B_2}$, M_{B_3,B'_3}, $\mathrm{M}_{B'_3,B_3}$.

d) Es sei $D(P) = P'$, die Ableitung von P. Zeigen Sie, dass $D : W \to W$ eine lineare Abbildung ist, und dass die Beschränkung $D|V_d$ eine lineare Abbildung $D_d : V_d \to V_{d-1}$ definiert. Zeigen Sie, dass D_d surjektiv ist.

e) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $\mathrm{Mat}(D_4; B_4, B_3)$ und $\mathrm{Mat}(D_4; B'_4, B'_3)$.

Bitte wenden!

f) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{Mat}(D_4; B_4, B_3')$ mithilfe von Basiswechselnmatrizen.

g) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}),$$

und $f : V_3 \to V_2$ die lineare Abbildung sodass $\mathrm{Mat}(f; B_3, B_2) = A$. Berechnen Sie $f(P)$, wobei

$$P(x) = 1 - 10x + x^3.$$

3. Es sei $W = \mathbb{C}^4$ und

$$V = \{(a, b, c, d) \in W \mid a + b + c + d = 0\}.$$

Es seien $f : W \to W$ und $g : W \to W$ die lineare Abbildungen

$$f(a, b, c, d) = (b, c, d, a), \qquad g(a, b, c, d) = (-a, -d, -c, -b).$$

a) Zeigen Sie, dass $V \subset W$ ein Unterraum ist, mit $\dim(V) = 3$.

b) Zeigen Sie, dass die Beschränkungen $f_1 = f|V$ und $g_1 = g|V$ lineare Abbildungen $V \to V$ definieren.

c) Zeigen Sie, dass

$$B = ((1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)),$$
$$B' = ((-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, -1, 1))$$

geordnete Basen von V sind.

d) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $\mathrm{M}_{B,B'}$ und $\mathrm{M}_{B',B}$.

e) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen

$$\mathrm{Mat}(f; B, B), \quad \mathrm{Mat}(f; B', B'), \quad \mathrm{Mat}(g; B, B), \quad \mathrm{Mat}(g; B', B').$$

f) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei $h : V \to V$ die lineare Abbildung sodass $\mathrm{Mat}(h; B, B) = A$. Für $v = (a, b, c, d) \in V$, berechnen Sie $h(v)$ als Funktion von (a, b, c, d).

Abgabe: Freitag, den 20. November 2015 vor 12:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.