Serie 12

1. **a)** Finden Sie alle Lösungen in $\mathbb{R}^4$ des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 + 3\,x_4 &= 0\\
3\,x_1 + 9\,x_2 - 2\,x_3 - 11\,x_4 &= 0\\
4\,x_1 + 12\,x_2 - 6\,x_3 - 8\,x_4 &= 0\\
2\,x_1 + 6\,x_2 + 2\,x_3 - 14\,x_4 &= 0.
\end{aligned}$$

b) Benutzen Sie a), um die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 + 3\,x_4 &= 9\\
3\,x_1 + 9\,x_2 - 2\,x_3 - 11\,x_4 &= -3\\
4\,x_1 + 12\,x_2 - 6\,x_3 - 8\,x_4 &= 6\\
2\,x_1 + 6\,x_2 + 2\,x_3 - 14\,x_4 &= -12.
\end{aligned}$$

zu finden.

2. Sei W der Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ aufgespannt von den Vektoren $v_1 = (1,2,1,2)$, $v_2 = (0,0,-1,1)$, $v_3 = (1,4,2,3)$ und $v_4 = (0,2,1,1)$.

a) Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge W ist.

b) Wählen Sie aus v_1, v_2, v_3, v_4 alle möglichen Basen von W aus.

3. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Lösungsmenge in $\mathbb{R}^3$ von

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x & + & y & - & z & = & 0\\
3x & + & y & + & 2z & = & 0\\
2x & & & + & 3z & = & 0.
\end{array}$$

4. Gegeben seien in $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$v_1 = (2,1,-1,3,1)\,,\ v_2 = (1,-1,3,1,1)\,,\ v_3 = (4,0,-2,6,2)\,,\ v_4 = (1,2,-1,2,0)\,.$$

Bitte wenden!

a) Finden Sie eine Basis für $V := \langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle$.

b) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ durch Hinzunahme von geeigneten Standardbasisvektoren.

5. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie jeweils Basen von $\mathrm{Ker}(F)$ und $\mathrm{Im}(F)$.

6. Berechnen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgende Matrix über $\mathbb{R}$ invertierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -2\alpha \\ -6 & 2 & 1 & \alpha^2. \end{pmatrix}$$

8. Invertieren Sie folgende Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Montag, den 14. Dezember 2015 am Anfang der Übungsstunde (oder Freitag im Fächlein im HG J 68).