Serie 13

1. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Für $n \geq 1$ und $x_1, \ldots, x_n$ in $\mathbb{K}$, wir definieren die *Vandermonde-Determinante*

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $V(x_1)$ und $V(x_1, x_2)$.

b) Zeigen Sie, dass

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

c) Zeigen Sie, dass

$$V(x_1,\ldots,x_n) = (x_n - x_1)\cdots(x_2 - x_1)V(x_2,\ldots,x_n).$$

d) Zeigen Sie, dass

$$V(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$$

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und für $n \geq 1$ sei A_n die $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} b & a & \ldots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \ldots & a & b \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie:

$$\det(A_n) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big).$$

4. Es seien n, $m \geq 1$. Beweisen Sie, dass für $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{m,m}(\mathbb{K})$, es gilt

$$\det\begin{pmatrix} A & 0_{n,m} \\ 0_{m,n} & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B).$$

5. Es sei V ein n-dimensional Vektorraum, und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Es seien B_1 and B_2 geordnete Basen von V. Wir definieren $A = \mathrm{Mat}(f; B_1, B_1)$, $B = \mathrm{Mat}(f; B_2, B_2)$.

Zeigen Sie, dass $\det(A) = \det(B)$.

6. Eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heisst *schiefsymmetrisch*, falls ${}^tA = -A$ gilt.

a) Für alle $n \geq 1$, geben Sie ein Beispiel einer schiefsymmetrischen Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ an.

b) Zeigen Sie, dass falls n ungerade ist, und $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch ist, ist $\det(A) = 0$.

c) Für eine gerade Zahl n, finden Sie eine schiefsymmetrische Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ mit $\det(A) \neq 0$.