

Lineare Algebra I

Zwischenprüfung

24. Februar 2016

Prüfungsversion A

Wichtig:

- Die Prüfung dauert *120 Minuten*.
- Bitte legen Sie Ihre Legi (Studierendenausweis) offen auf den Tisch.
- Notieren Sie die Version Ihrer Prüfung, Ihre Leginummer und Ihren Namen *in Blockschrift* auf dem Antwortblatt.
- Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig durch, und achten Sie besonders auf die Begriffe *abhängig* und *unabhängig*.
- Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen. Aufgaben 1–11 sind grösstenteils rechnerisch, die übrigen Aufgaben sind theoretisch.
- Ein Antwortkästchen muss *ausgemalt* werden, um es zu markieren. Bitte schreiben Sie auf dem Antwortblatt nur mit Füllfederhalter oder Kugelschreiber und nur in blau oder schwarz. Machen Sie *keine* Notizen auf dem Antwortblatt. Korrekturen auf dem Antwortblatt bitte mit *Tipp-Ex* durchführen.
- Am Ende der Prüfung tragen Sie als Prüfsumme die Anzahl der von Ihnen ausgemalten Felder auf dem Antwortblatt ein.
- Nach Ende der Prüfung wird das Antwortblatt eingesammelt; das Aufgabenblatt können Sie mitnehmen.
- In jeder Aufgabe (bzw. Teilaufgabe, gekennzeichnet durch (i), (ii) usw.) ist genau eine Antwort richtig. Ist diese und nur diese Antwort ausgemalt, so erhalten Sie *2 Punkte*. Ist keine Antwort ausgemalt, so erhalten Sie *0 Punkte*. Ist eine falsche Antwort ausgemalt, so erhalten Sie *1 Minuspunkt*.
- Hilfsmittel: Keine.

Viel Erfolg!

Bitte wenden!

Wir bezeichnen als $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$ den Vektorraum von Polynomen mit reellen Koeffizienten. Für $n \geq 0$, sei $\mathcal{P}_n = \{P \in \mathcal{P} : P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n\}$ der Unterraum der Polynome vom Grad $\leq n$.

1. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A^4 - A^2 + 1_2$.

a) $\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Welche der folgenden Aussagen gilt für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda x + y &= 1 \\ x + \lambda y + z &= \lambda \\ x + y + \lambda z &= \lambda^2? \end{aligned}$$

- a) Das System hat eine eindeutige Lösung für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- b) Das System hat keine Lösung für $\lambda = -2$.
- c) Das System hat mehr als eine Lösung für $\lambda = 0$.
- d) Keine von den Aussagen a), b), c) gilt.

3. Sei V ein reeller Vektorraum, und $\{x, y, z\}$ eine linear unabhängige Menge in V . Ist die Menge $\{x + y, y + z, z + x\}$ linear abhängig?

- a) Die Antwort hängt von den Vektoren x, y, z ab.
- b) Ja.
- c) Nein.

4. Sei V ein reeller Vektorraum, $u, v, w, z \in V$ und

$$\begin{aligned} v_1 &= u + v + w + z \\ v_2 &= 2u + 2v + w - z \\ v_3 &= u - w + z \\ v_4 &= -v + w - z \\ v_5 &= u + v + 3w - z. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Ist die Menge $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ linear abhängig?

- a) Die Antwort hängt von den Vektoren u, v, w, z ab.
- b) Ja.
- c) Nein.

5. Sei

$$S = \{(1, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^5.$$

Was ist die Dimension von $\langle S \rangle$?

- a) 5;
- b) 4;
- c) 3;
- d) 2.

6. Bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums $V = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(1) + p(-1) = 0\}$.

- a) $\dim V = 4$.
- b) $\dim V = 3$.
- c) $\dim V = 2$.

7. Seien $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ und $\mathcal{C} = \{x^2, (x+1)^2, (x+2)^2\}$ geordnete Basen von \mathcal{P}_2 . Berechnen Sie die Basiswechselmatrix von \mathcal{B} zu \mathcal{C} .

a) $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

d) $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

e) $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

c) $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

f) $M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$

8. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. Welche Aussage gilt?

- a) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(-2, -8, 3)$.
- b) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(1, 7, -10)$.

Bitte wenden!

- c) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(-8, 18, 1)$.
- d) Die Matrix A ist invertierbar und ihre Inverse hat Diagonaleinträge $(9, -5, 14)$.
- e) Die Matrix A ist nicht invertierbar.

9. Sei f die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}_4 &\longrightarrow \mathcal{P}_4 \\ P(X) &\longmapsto (X + 1)P'(X). \end{aligned}$$

Seien \mathcal{B} und \mathcal{C} die folgenden geordneten Basen von \mathcal{P}_4 :

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3, x^4) \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = (1, x + 1, x^2, x^3, (x + 1)^4).$$

(i) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich \mathcal{B} .

$$\mathbf{a)} \quad \text{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{c)} \quad \text{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{b)} \quad \text{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{d)} \quad \text{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} .

$$\mathbf{e)} \quad \text{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -12 & -24 & -12 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{f)} \quad \text{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\mathbf{g)} \operatorname{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 12 & -16 & -24 & -12 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{h)} \operatorname{Mat}(f; \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

10. Bestimmen Sie den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

- a)** Rang $A = 4$, Rang $B = 3$. **d)** Rang $A = 3$, Rang $B = 2$.
b) Rang $A = 3$, Rang $B = 4$. **e)** Rang $A = 2$, Rang $B = 3$.
c) Rang $A = 3$, Rang $B = 3$. **f)** Rang $A = 2$, Rang $B = 2$.

11. Sind die folgenden Mengen linear unabhängig?

- (i) $\{1 + i, 1 - i\} \subset \mathbb{C}$, wobei \mathbb{C} als ein \mathbb{C} -Vektorraum aufgefasst wird;
 (ii) $\{1 + i, 1 - i\} \subset \mathbb{C}$, wobei \mathbb{C} als ein \mathbb{R} -Vektorraum aufgefasst wird;
 (iii) $\{x^3 + 1, x^2 + x + 1, x^3 + x + 1, x^2 + 2\} \subset \mathcal{P}_3$.
 (iv) $\{(1, 2, 3, 4), (-3, 4, 2, 8), (-3, 9, 1, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$;
 (v) $\{(1, 0, 0, 1), (2, 3, -3, 9), (1, 3, -4, 7), (2, 0, 1, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$.

12. Sei V der Vektorraum von Funktionen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}$. Sind die folgenden Mengen linear unabhängig in V ?

- (i) $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, wobei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = (x + 1)^2$, $f_4(x) = x$;
 (ii) $\{f_1, f_2, f_3\}$, wobei f_1, f_2, f_3 wie in (i);
 (iii) $\{h_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $h_n(x) = 1/(x + n)$;
 (iv) $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $g_n(x) = e^{nx}$.

13. Sei $V = M_{2,2}(\mathbb{K})$. Sind die folgenden Mengen Unterräume von V ?

Bitte wenden!

- (i) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a = d \right\};$ (iii) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid ad - bc \neq 0 \right\};$
(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid d = 0 \right\};$ (iv) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in V \right\}.$

Hinweis zu den Aufgaben 14-21. Eine Aussage, die Variablen beinhaltet, gilt genau dann als *wahr* (W), wenn sie für jede Wahl der Variablen zutrifft. Ansonsten gilt sie als *falsch* (F).

14. Sei $f: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ die Abbildung sodass $f(P) = P + P''$. Welche Aussagen sind wahr?

- (i) f ist surjektiv.
(ii) f ist injektiv.

15. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} und $S \subset V$ eine Untermenge. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (i) Falls $|S| \leq \dim(V)$, ist S ein Erzeugendensystem von V .
(ii) Falls S ein Unterraum ist, dann ist S linear unabhängig.
(iii) S enthält eine Basis von V .

16. Sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Welche Aussagen sind wahr?

- (i) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild

$$f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$$

ein Unterraum von V .

- (ii) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild $f^{-1}(W')$ ein Unterraum von V , und es gilt

$$\dim f^{-1}(W') = \dim \text{Ker}(f) + \dim(\text{Im}(f) \cap W').$$

- (iii) Falls das Bild von f eine Basis von W enthält, ist f surjektiv.
(iv) Falls $\dim(V) < \dim(W)$, ist f nicht injektiv.
(v) Falls $S \subset V$ linear unabhängig ist, dann ist $f(S) \subset W$ linear unabhängig.

Siehe nächstes Blatt!

17. Sei $V = \mathbb{R}[X]$ und $f: V \rightarrow V$ die lineare Abbildung sodass $f(P)(X) = P(X + 1)$, z.B. $f(X^2) = (X + 1)^2$. Welche Aussagen sind wahr?

- (i) Die Abbildung f ist bijektiv und $f^{-1}(P) = P - 1$.
- (ii) Die Abbildung f ist injektiv.
- (iii) Die Abbildung f ist surjektiv.

18. Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr für alle $x, y, z \in V \setminus \{0\}$ mit $x + y + z = 0$?

- (i) $\dim\langle\{x, y, z\}\rangle = 2$.
- (ii) $\langle\{x, y\}\rangle = \langle\{y, z\}\rangle$.
- (iii) Die Menge $\{x, y, z\}$ ist linear unabhängig.

19. Seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$. Welche Aussagen sind wahr?

- (i) Sei $m = 3$ und $n = 2$. Dann ist AB nicht invertierbar.
- (ii) Wenn A und B invertierbar sind, dann ist AB auch invertierbar.
- (iii) Wenn $AB = 1_m$, dann ist $BA = 1_n$.

20. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Welche Aussagen sind wahr?

- (i) $A^2 \neq 0$.
- (ii) Kein Koeffizient a_{ij} von A ist Null.
- (iii) $m \geq n$.
- (iv) $A^{-1} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$.
- (v) $m = n$.

21. Welche Aussagen sind wahr?

- (i) Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die lineare Abbildung $f_A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv.
- (ii) Eine lineare Abbildung ist injektiv genau dann, wenn sie surjektiv ist.