D-PHYS
D-MATH
D-CHAB

Mathematische Methoden der Physik I

Prof. G. Felder
ETH Zürich
HS 2015

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. *(a) Für die Fourierkoeffizienten c_n von $f(x) = \cos^{2016}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ gilt:*

W☐ F☐ $c_n = 0$ *für* $|n| > 2016$.
W☐ F☐ $c_n = 0$ *für n gerade.*
W☐ F☐ $c_n = 0$ *für n ungerade.*
W☐ F☐ $\sum_{n=-2016}^{2016} c_n = 1$.

(b) Sei δ die Dirac-Distribution und θ die Heaviside Funktion: $\theta(x) = 1$ für $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ für $x < 0$. Was ist richtig?

W☐ F☐ $\frac{d}{dx}|x| = 2\delta(x)$.
W☐ F☐ $\delta(3x) = \frac{1}{3}\delta(x)$.
W☐ F☐ $\frac{d^2}{dx^2}\delta[\varphi] = 0$ *falls $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine ungerade Funktion ist.*
W☐ F☐ $\frac{d}{dx}\delta(x) = \theta(x)$.

(c) Sei $u(t,x)$ $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ die Lösung der Wellengleichung $c^{-2}\partial^2 u/\partial t^2 - \triangle u = 0$ in drei Raumdimensionen mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$.

W☐ F☐ *Ist $f(x) = g(x) = 0$ für $|x| > R$, so ist $u(x,1) = 0$ für $|x| < c - R$.*
W☐ F☐ *Ist $g(x) = 0$ für alle x, so ist $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0$ für alle $x, t > 0$.*
W☐ F☐ *Ist $f(x) = g(x) = 0$ für $|x| > R$, so ist $u(x,1) = 0$ für $|x| > c + R$.*
W☐ F☐ *$u(x,t)$ ist eine periodische Funktion von t.*

(d) Sei $u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, die (beschränkte) Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial u/\partial t - \triangle u = 0$ mit Anfangsbedingung $u(0,x) = f(x)$. Wir nehmen an, dass f stetig ist und einen kompakten Träger hat, so dass $f(0) > 0$[1] und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

W☐ F☐ $u(t,x) > 0$ *für alle* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^3$.
W☐ F☐ *Für alle $t > 0$ hat $x \mapsto u(t,x)$ kompakten Träger.*
W☐ F☐ $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^3$.
W☐ F☐ *$u(t,x)$ ist periodisch als Funktion von t.*

Lösung 1. *(a) Für die Fourierkoeffizienten c_n von $f(x) = \cos^{2016}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ gilt:*

[1] Die Annahme $f(0) > 0$ wurde in der neuen Fassung hinzugefuegt um die Aufgabe sinnvoller zu machen.

$W \boxed{\checkmark}$ $F \square$ $c_n = 0$ *für* $|n| > 2016$.
$W \square$ $F \boxed{\checkmark}$ $c_n = 0$ *für* n *gerade.*
$W \boxed{\checkmark}$ $F \square$ $c_n = 0$ *für* n *ungerade.*
$W \boxed{\checkmark}$ $F \square$ $\sum_{n=-2016}^{2016} c_n = 1$.

(b) *Sei* δ *die Dirac-Distribution und* θ *die Heaviside Funktion:* $\theta(x) = 1$ *für* $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ *für* $x < 0$. *Was ist richtig?*
$W \square$ $F \boxed{\checkmark}$ $\frac{d}{dx}|x| = 2\delta(x)$.
$W \boxed{\checkmark}$ $F \square$ $\delta(3x) = \frac{1}{3}\delta(x)$.
$W \boxed{\checkmark}$ $F \square$ $\frac{d^2}{dx^2}\delta[\varphi] = 0$ *falls* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *eine ungerade Funktion ist.*
$W \square$ $F \boxed{\checkmark}$ $\frac{d}{dx}\delta(x) = \theta(x)$.

(c) *Sei* $u(t,x)$ $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ *die Lösung der Wellengleichung* $c^{-2}\partial^2 u/\partial t^2 - \triangle u = 0$ *in drei Raumdimensionen mit Anfangsbedingungen* $u(0,x) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$.
$W \boxed{\checkmark}$ $F \square$ *Ist* $f(x) = g(x) = 0$ *für* $|x| > R$, *so ist* $u(x,1) = 0$ *für* $|x| < c - R$.
$W \square$ $F \boxed{\checkmark}$ *Ist* $g(x) = 0$ *für alle* x, *so ist* $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0$ *für alle* $x, t > 0$.
$W \boxed{\checkmark}$ $F \square$ *Ist* $f(x) = g(x) = 0$ *für* $|x| > R$, *so ist* $u(x,1) = 0$ *für* $|x| > c + R$.
$W \square$ $F \boxed{\checkmark}$ $u(x,t)$ *ist eine periodische Funktion von* t.

(d) *Sei* $u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, *die (beschränkte) Lösung der Wärmeleitungsgleichung* $\partial u/\partial t - \triangle u = 0$ *mit Anfangsbedingung* $u(0,x) = f(x)$. *Wir nehmen an, dass* f *stetig ist und einen kompakten Träger hat, so dass* $f(0) > 0$ *und* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^3$. *Dann gilt:*
$W \boxed{\checkmark}$ $F \square$ $u(t,x) > 0$ *für alle* $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^3$.
$W \square$ $F \boxed{\checkmark}$ *Für alle* $t > 0$ *hat* $x \mapsto u(t,x)$ *kompakten Träger.*
$W \boxed{\checkmark}$ $F \square$ $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^3$.
$W \square$ $F \boxed{\checkmark}$ $u(t,x)$ *ist periodisch als Funktion von* t.

Aufgabe 2. *Sei*

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi c}\int_{|y|\leq ct} \frac{g(x+y)\,dy_1 dy_2}{\sqrt{c^2t^2 - |y|^2}}$$

die Lösung der Wellengleichung in der Ebene mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$. *Wir nehmen an, dass* g *glatt ist und dass* $g(x) = 0$ *für* $|x| \geq R$. *Zeigen Sie*

1. *Für alle* $t \geq 0$ *gilt:* $\max\{|u(t,x)|, x \in \mathbb{R}^2\} \leq t \max |g|$
2. *Für* $t \geq 2R/c$ *gilt:* $|u(t,0)| \leq \frac{\text{Konst}}{t}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$.

Lösung 2. *Für jedes $x \in \mathbb{R}^3$ gilt*

$$\begin{aligned}
|u(t,x)| &\leq \frac{1}{2\pi c}\int_{|y|\leq ct} \frac{|g(x+y)|}{\sqrt{c^2t^2-|y|^2}} dy_1 dy_2 \\
&\leq \frac{1}{2\pi c}\int_{|y|\leq ct} \frac{\max|g|}{\sqrt{c^2t^2-|y|^2}} dy_1 dy_2 \\
&= \max|g| \frac{1}{2\pi c}\int_0^{2\pi}\int_0^{ct} \frac{1}{\sqrt{c^2t^2-r^2}} r dr d\varphi \\
&= \max|g| \frac{1}{2c}\int_0^{c^2t^2} \frac{1}{\sqrt{c^2t^2-x}} dx \\
&= -\max|g| \frac{1}{c}\sqrt{c^2t^2-x}\Big|_0^{c^2t^2} = \max|g| t,
\end{aligned}$$

wobei wir in der dritten Zeile in Polarkoordinaten übergehen und in der vierten Zeile noch die Koordinatentransformation $x = r^2$ gemacht wird. Da die obige Ungleichung für alle x gilt, folgt

$$\max|u(t,x)| \leq t \max|g|.$$

(b) *Es sei $\Omega := \{y \in \mathbb{R}^2 : |y| < R\}$. Dann*

$$\begin{aligned}
|u(t,0)| &\leq \frac{1}{2\pi c}\int_{|y|\leq ct} |g(y)| \frac{1}{\sqrt{c^2t^2-|y|^2}} dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{2\pi c}\int_{|y|<R} \frac{|g(y)|}{\sqrt{c^2t^2-|y|^2}} dy_1 dy_2 \\
&\leq \frac{1}{2\pi c}\int_{|y|<R} |g(y)| \frac{1}{\sqrt{c^2t^2-R^2}} dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{2\pi c}\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-R^2}}\int_{|y|<R} |g(y)| dy_1 dy_2 \\
&= \frac{1}{2\pi c}\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-R^2}}\|g\|_{L^1(\Omega)} \\
&= \frac{1}{2\pi c}\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-R^2}}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Aus der zusätzlichen Bedingung $t \geq 2R/c$ folgt schlussendlich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi c}\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-R^2}} &= \frac{1}{2\pi c}\frac{1}{ct\sqrt{1-\frac{R^2}{c^2t^2}}} \\
&\leq \frac{1}{2\pi c}\frac{1}{ct\sqrt{1-\frac{R^2}{4R^2}}} \\
&= \frac{1}{2\pi c}\frac{2}{ct\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{\pi c}\frac{1}{ct\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}\pi c^2}\frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Das liefert

$$|u(t,0)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}\pi c^2}\frac{1}{t}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Aufgabe 3. *Seien $k, R > 0$. Finden Sie die Lösung $u(t,x) = u(t, x+2\pi R)$ des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t > 0, \\
u(0,x) &= 1 - \frac{|x|}{\pi R}, \quad -\pi R \leq x \leq \pi R,
\end{aligned}$$

für die Wärmeleitungsgleichung auf einem Ring von Radius R. Die Lösung soll als Fourier-Reihe $u(t,x) = \sum c_n(t)e^{inx/R}$ angegeben werden.

Lösung 3. *Aus der Aufgabenstellung ist klar, dass*

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t)e^{inx/R},$$

wobei

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi R}^{\pi R} u(t,x)e^{-inx/R}dx.$$

Die Fourierkoeffizienten erfüllen die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}c_n(t) &= \frac{k}{2\pi R}\int_{-\pi R}^{\pi R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)e^{-inx/R}dx \\
&= -\frac{kn^2}{R^2}c_n(t),
\end{aligned}$$

wobei die Randterme bei der partiellen Integration in der obigen Rechnung wegen der Periodizität von u und ihre erste partielle Ableitung nach x verschwinden. Für $c_n(t)$ ergibt sich

$$c_n(t) = c_n(0)e^{-\frac{kn^2}{R^2}t}$$

wobei

$$c_n(0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi R}^{\pi R}(1 - \frac{|x|}{\pi R})e^{-inx/R}dx.$$

Für $n \neq 0$ erhalten wir für $c_n(0)$

$$\begin{aligned}
c_n(0) &= \frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi R}^{\pi R}(1 - \frac{|x|}{\pi R})e^{-inx/R}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi R}^{\pi R}(\frac{|x|}{\pi R})e^{-inx/R}dx \\
&= \frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi R}^{0}(\frac{x}{\pi R})e^{-inx/R}dx - \frac{1}{2\pi R}\int_{0}^{\pi R}(\frac{x}{\pi R})e^{-inx/R}dx \\
&\underbrace{=}_{P.I.} \frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{1}{\pi^2}\Big(\frac{-\sin(n\pi)n - \cos(n\pi)}{n^2}\Big) \\
&= \frac{1}{\pi^2 n^2} - \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \\
&= \begin{cases} 0, \quad \textit{falls} \quad n = 2j, \quad j \in \mathbb{Z} \\ \frac{2}{\pi^2 n^2}, \quad \textit{falls} \quad n = 2j+1, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Wenn $n = 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_0(0) &= \frac{1}{2\pi R}\int_{-\pi R}^{\pi R}(1 - \frac{|x|}{\pi R})dx \\
&= \frac{1}{\pi R}\int_{0}^{\pi R}(1 - \frac{x}{\pi R})dx \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Deswegen kriegt man

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{2} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{2}{(2j+1)^2\pi^2}e^{-\frac{k(2j+1)^2}{R^2}t + i(2j+1)x/R} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{(2j+1)^2\pi^2}e^{-\frac{k(2j+1)^2 t}{R^2}}\cos((2j+1)x/R).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. *(Schrödingergleichung für ein freies Teilchen) Finden Sie die Lösung* $\psi(t,x) \in \mathbb{C}$*,* $t > 0, x \in \mathbb{R}^3$ *der partiellen Differenzialgleichung*

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi, \quad \hbar, m > 0,$$

mit Anfangsbedingung

$$\psi(0,x) = e^{-|x|^2}.$$

Hinweis: Fouriertransformation in x.

Lösung 4. *Zunächst finden wir mit Hilfe der Formel*

$$\left(e^{-\lambda|x|^2/2}\right)\widehat{} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} e^{-|k|^2/2\lambda}, \quad \lambda > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n$$

aus dem Skript auf Seite 17 die Fouriertransformierte von $\psi(0,x)$*:*

$$\hat{\psi}(0,k) = (e^{-|x|^2})\widehat{} = \pi^{3/2}e^{-|k|^2/4}.$$

Dann transformieren wir die Schrödingergleichung bezüglich x *und bekommen*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi} = \frac{\hbar^2}{2m}|k|^2\hat{\psi}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\hat{\psi}(t,k) = C(k)e^{-i\left(\frac{\hbar|k|^2}{2m}\right)t}$$

Die Randbedingung $\hat{\psi}(0,k) = \pi^{3/2}e^{-|k|^2/4}$ *liefert dann*

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(t,k) &= \pi^{3/2}e^{-|k|^2/4}e^{-i\left(\frac{\hbar|k|^2}{2m}\right)t} \\ &= \pi^{3/2}e^{-(\frac{1}{4}+i\frac{\hbar t}{2m})|k|^2}.\end{aligned}$$

Durch eine Fourierrücktransformation von $\hat{\psi}$ *bekommt man die gesuchte Lösung des Anfangwertproblems:*

$$\begin{aligned}\psi(t,x) &= \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(\frac{1}{4}+i\frac{\hbar t}{2m})|k|^2}e^{ik\cdot x}dk \\ &= \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})|k|^2}e^{ik\cdot x}dk \\ &= \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3}\prod_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})k_j^2}e^{ik_jx_j}dk_j.\end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral $I(x_j) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})k_j^2} e^{ik_jx_j} dk_j$.

$$\begin{aligned}
\frac{dI(x_j)}{dx_j} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})k_j^2}(ik_j)e^{ik_jx_j} dk_j \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(\frac{1}{2}i - \frac{\hbar t}{m})} \frac{d}{dk_j}(e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})k_j^2})e^{ik_jx_j} dk_j \\
&\underbrace{=}_{P.I.} -\frac{1}{(\frac{1}{2}i - \frac{\hbar t}{m})} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})k_j^2} ix_j e^{ik_jx_j} dk_j \\
&= \frac{-ix_j}{(\frac{1}{2}i - \frac{\hbar t}{m})} I.
\end{aligned}$$

Die Integration beider Seiten führt zu

$$\begin{aligned}
I(x_j) &= C_j(t)e^{-ix_j^2/(i-\frac{2\hbar}{m}t)} \\
&= C_j(t)e^{-\frac{x_j^2}{(1+\frac{2i\hbar}{m}t)}}.
\end{aligned}$$

Um $C_j(t)$ *zu bestimmen setzen wir* $C_j(t) = I(0)$ *gleich. Das liefert*

$$\begin{aligned}
I(0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})k_j^2} dk_j \\
&= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})k_j^2} dk_j \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})\tilde{k}_j^2} d\tilde{k}_j} \\
&\underbrace{=}_{Fubini} \sqrt{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})k_j^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})\tilde{k}_j^2} dk_j d\tilde{k}_j} \\
&= \sqrt{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})(k_j^2+\tilde{k}_j^2)} dk_j d\tilde{k}_j} \\
&\underbrace{=}_{Polarkoord.} \sqrt{2\pi \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m}r^2)} r dr} \\
&\underbrace{=}_{r^2=x} \sqrt{\pi \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})x} dx} \\
&= \sqrt{-2\pi \frac{e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})x}}{(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})}\Big|_0^\infty} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(\frac{1}{2}+i\frac{\hbar t}{m})}},
\end{aligned}$$

wobei wir diejenige Wurzel mit dem positiven Realteil auswählen. Also,

$$I(x_j) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(\frac{1}{2} + i\frac{\hbar t}{m})}} e^{-x_j^2/(1+\frac{2i\hbar}{m}t)}.$$

Man erhält

$$\begin{aligned}\psi(t,x) &= \frac{\pi^{3/2}}{(2\pi)^3} \frac{(\sqrt{2\pi})^3}{\left(\sqrt{(\frac{1}{2} + i\frac{\hbar t}{m})}\right)^3} e^{-|x|^2/(1+\frac{2i\hbar}{m}t)} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{2i\hbar}{m}t\right)^{3/2}} e^{-|x|^2/(1+\frac{2i\hbar}{m}t)}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5. *(a) Berechnen Sie die Fourier-Rücktransformierte* $f^\vee(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(k)e^{ikx}dk$ *von* $f(k) = 1/(k-i)^2$, $(i = \sqrt{-1})$.

(b) Finden Sie eine Fundamentallösung für den Differenzialoperator

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1.$$

Lösung 5. ***a)*** *Das Integral* $f^\vee(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(k)e^{ikx}dk$ *lässt sich mit dem Residuensatz berechnen. Von Funktionentheorie ist es bekannt, dass im Fall* $x > 0$ *für Polynome* $p(k)$ *und* $q(k)$ *mit* $\deg p \leq \deg q - 1$, *gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{p(k)}{q(k)} e^{ixk} dk = \sum_{i=1}^{n} Res_{k_i} g(k),$$

wobei $g(k) = \frac{p(k)}{q(k)}e^{ixk}$ *und* $k_1, \ldots, k_n$ *die in der oberen komplexen Halbebene* $\mathbb{H}$ *liegenden Nullstellen von* $q(k)$ *sind. In unserem Fall haben wir* $p(k) = 1$, $q(k) = (k-i)^2$ *mit einer Polstelle* $k = i$ *zweiter Ordnung. Das Residuum von* $g(k) = \frac{1}{(k-i)^2}e^{ixk}$ *ist*

$$\begin{aligned}Res_i g(k) &= \lim_{k\to i} \frac{d}{dk}((k-i)^2 g(k)) \\ &= \lim_{k\to i} \frac{d}{dk}(e^{ixk}) \\ &= \lim_{k\to i} ixe^{ikx} \\ &= ixe^{-x}.\end{aligned}$$

Folglich,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(k-i)^2} e^{ixk} dk = -2\pi x e^{-x}.$$

Daraus ergibt sich

$$f^\vee(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(k-i)^2} e^{ixk} dk = -xe^{-x}.$$

Im Fall, wenn $x \leq 0$, ist $f^\vee(x) = 0$, da der Integrand keine Pole in der unteren Halbebene hat. In zusammengefasster Form

$$f^\vee(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(k-i)^2} e^{ixk} dk = \begin{cases} -xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

b) *Eine Fundamentallösung für den Differentialoperator $L = \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1$ ist eine Distribution $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, die der Gleichung*

$$LE = \delta$$

genügt. Diese Gleichung lässt sich für die Fouriertransformierte $\hat{E}(k)$ umschreiben als

$$P(k)\hat{E}(k) = 1,$$

wobei $P(k) = -k^2 + 2ik + 1 = -(k-i)^2$. $P(k)$ hat also keine rellen Nullstellen, deswegen definiert $\hat{E}(k) = 1/P(k)$ nach dem Skript, S. 61, eine Distribution. Die Fundamentallösung ist die Fourier-rücktransformierte von $-\frac{1}{(k-i)^2}$. Dann folgt aus Teilaufgabe ***a)****,*

$$E(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$