D-PHYS Prof. G. Felder
D-MATH ETH Zürich
D-CHAB **Mathematische Methoden der Physik I** HS 15

Ferienserie

Serie ist im Umfang, Stil und Schwierigkeitsgrad ähnlich zur schriftlichen Prüfung. Die Aufgaben sind aber verschieden. Alle 5 Aufgaben der Prüfung werden gleich bewertet. Wir empfehlen, die Serie mit der "Zusammenfassung der Formeln" als einziges Hilfsmittel zu lösen. Diese wird dem Prüfungsblatt beigelegt.

(1) Bei jeder Aussage kreuzen Sie an, ob sie wahr (W) oder falsch (F) ist (1 Punkt für jedes richtig gesetzte Kreuz). Es können mehrere Aussagen bei jeder Gruppe stimmen.

(a) Für die Fourierkoeffizienten c_n von $f(x) = \cos^{2016}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ gilt:
W☐ F☐ $c_n = 0$ für $|n| > 2016$.
W☐ F☐ $c_n = 0$ für n gerade.
W☐ F☐ $c_n = 0$ für n ungerade.
W☐ F☐ $\sum_{n=-2016}^{2016} c_n = 1$.

(b) Sei δ die Dirac-Distribution und θ die Heaviside Funktion: $\theta(x) = 1$ für $x \geq 0$, $\theta(x) = 0$ für $x < 0$. Was ist richtig?
W☐ F☐ $\frac{d}{dx}|x| = 2\delta(x)$.
W☐ F☐ $\delta(3x) = \frac{1}{3}\delta(x)$.
W☐ F☐ $\frac{d^2}{dx^2}\delta[\varphi] = 0$ falls $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ eine ungerade Funktion ist.
W☐ F☐ $\frac{d}{dx}\delta(x) = \theta(x)$.

(c) Sei $u(t,x)$ $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ die Lösung der Wellengleichung $c^{-2}\partial^2 u/\partial t^2 - \triangle u = 0$ in drei Raumdimensionen mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$.
W☐ F☐ Ist $f(x) = g(x) = 0$ für $|x| > R$, so ist $u(x,1) = 0$ für $|x| < c - R$.
W☐ F☐ Ist $g(x) = 0$ für alle x, so ist $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0$ für alle $x, t > 0$.
W☐ F☐ Ist $f(x) = g(x) = 0$ für $|x| > R$, so ist $u(x,1) = 0$ für $|x| > c + R$.
W☐ F☐ $u(x,t)$ ist eine periodische Funktion von t.

(d) Sei $u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, die (beschränkte) Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\partial u/\partial t - \triangle u = 0$ mit Anfangsbedingung $u(0,x) = f(x)$. Wir nehmen an, dass f stetig ist und einen kompakten Träger hat, so dass $f(0) > 0$[1] und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:
W☐ F☐ $u(t,x) > 0$ für alle $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^3$.
W☐ F☐ Für alle $t > 0$ hat $x \mapsto u(t,x)$ kompakten Träger.

[1]Die Annahme $f(0) > 0$ wurde in der neuen Fassung hinzugefuegt um die Aufgabe sinnvoller zu machen.

W☐ F☐ $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.
W☐ F☐ $u(t,x)$ ist periodisch als Funktion von t.

(2) Sei

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|y|\le ct} \frac{g(x+y)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{c^2t^2 - |y|^2}}$$

die Lösung der Wellengleichung in der Ebene mit Anfangsbedingungen $u(0,x) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$. Wir nehmen an, dass g glatt ist und dass $g(x) = 0$ für $|x| \ge R$. Zeigen Sie
  (a) Für alle $t \ge 0$ gilt: $\max\{|u(t,x)|, x \in \mathbb{R}^2\} \le t \max |g|$
  (b) Für $t \ge 2R/c$ gilt: $|u(t,0)| \le \frac{\text{Konst}}{t} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$.

(3) Seien $k, R > 0$. Finden Sie die Lösung $u(t,x) = u(t, x+2\pi R)$ des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t > 0,$$
$$u(0,x) = 1 - \frac{|x|}{\pi R}, \quad -\pi R \le x \le \pi R,$$

für die Wärmeleitungsgleichung auf einem Ring von Radius R. Die Lösung soll als Fourier-Reihe $u(t,x) = \sum c_n(t) e^{inx/R}$ angegeben werden.

(4) (Schrödingergleichung für ein freies Teilchen) Finden Sie die Lösung $\psi(t,x) \in \mathbb{C}$, $t > 0, x \in \mathbb{R}^3$ der partiellen Differenzialgleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle \psi, \quad \hbar, m > 0,$$

mit Anfangsbedingung

$$\psi(0,x) = e^{-|x|^2}.$$

Hinweis: Fouriertransformation in x.

(5) (a) Berechnen Sie die Fourier-Rücktransformierte $f^\vee(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(k) e^{ikx} dk$ von $f(k) = 1/(k-i)^2$, $(i = \sqrt{-1})$.
  (b) Finden Sie eine Fundamentallösung für den Differenzialoperator

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1.$$